UNPA
Universidad Nacional de la Patagonia Austral

RIO GALLEGOS, 30 AGO. 2004

VISTO:

El Expediente Nº 13.002/99 de la Unidad Académica Río Gallegos; y

**CONSIDERANDO:**

QUE a Fs. 122 obra nota presentada por el responsable de la cátedra Análisis Matemático I Ingº. Jorge R. LESCANO mediante la cual adjunta una guía de ejercicios resueltos, extraídos de diferentes parciales tomados en la materia a lo largo de los últimos años, que fue elaborada juntamente con los Ingº. Luis BURGOS, Claudia LAURLUND y Patricio TRIÑANES;

QUE dicha guía ya ha sido puesta a disposición de los alumnos y comprende Límites de sucesiones, Límite de funciones, Continuidad de funciones, Derivadas, Primitivas e Integrales definidas;

QUE el Ingº. LESCANO solicita que el material citado con anterioridad sea girado a la Biblioteca "Malvina Perazo" y se adjunte una copia del presente instrumento legal en el legajo personal de los autores;

QUE fue tratado en Acto Plenario y aprobado por unanimidad,

POR ELLO:

EL CONSEJO DE LA
UNIDAD ACADEMICA RIO GALLEGOS
ACUERDA:

**ARTICULO 1º.-** ACEPTAR Y AGRADECER la donación de la guía de ejercicios resueltos extraídos de diferentes parciales tomados en la materia a lo largo de los últimos años la que comprende Límites de sucesiones, Límite de funciones, Continuidad de funciones, Derivadas, Primitivas e Integrales definidas, elaborada por los Ingº. Jorge LESCANO, Luis BURGOS, Claudia LAURLUND y Patricio TRIÑANES, la que será destinada a la Biblioteca "Malvina Perazo" de esta UARG.-

**ARTICULO 2º.-** INCORPORAR por la Jefatura de la División Administración de Personal copia del presente instrumento legal en los legajos de los Ingº. Jorge LESCANO, Luis BURGOS, Claudia LAURLUND y Patricio TRIÑANES.-

**ARTICULO 3º.-** Regístrese. Publíquese. Comuníquese. Tomen Conocimiento Biblioteca "Malvina Perazo", Mesa de Entradas y Archivo, notificar a los interesados y cumplido, ARCHIVESE.-

Martha Beatriz Carrizo
a/c. Subdirección de Despacho
Consejo de Unidad
UNPA-UARG

UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PATAGONIA AUSTRAL
UNIDAD ACADEMICA RIO GALLEGOS

Dr. Alejandro Súnico
Decano
UNPA-UARG

ACUERDO Nº 8

# *ANALISIS MATEMATICO I*

## *Ejercicios resueltos*
## *Límite de sucesiones*

*1) Calcula, si existe, el límite para* $n \to \infty$ *de la siguiente sucesión:*

$$a_n = (1-n)(2-\frac{(-1)^n}{n})$$

*Tratamos de encontrar* $L = \lim_{n\to\infty}(1-n)\,(2-\frac{(-1)^n}{n})$

*Como se trata de un producto, puede intentarse aplicar las propiedades de límite de sucesiones, esto es,* $L = L_1 L_2$, *lo cual es posible siempre que ambos límites existan y sean finitos, siendo:*

$L_1 = \lim_{n\to\infty}(1-n)$, *y* $L_2 = \lim_{n\to\infty}(2-\frac{(-1)^n}{n})$

*Observa que el término* $(1-n) \approx -n$ *(simboliza "aproximadamente igual a -n") para valores de n* ***suficientemente grandes****. Por lo tanto, puede decirse que* $L_1 = -\infty$

*Por otro lado,* $L_2$ *contiene un término constante: 2 y otro que se sustrae de él y que toma valores que varían con n según la siguiente ley:* $(-1)^n/n$, *o sea,* $-1^1/1 = -1$, $-1^2/2 = 1/2$, $-1^3/3 = -1/3$, ....

*Es decir que los términos de la sucesión serán:* $2-(-1)^1/1 = 3$; $2-(-1)^2/2 = 1.5$; $2-(-1)^3/3 = 2.3333$, *y así. (A esto se denomina una sucesión oscilante decreciente). Para valores muy grandes de n, el término* $\frac{(-1)^n}{n}$ *tiende a 0, por lo cual* $L_2$ *se acerca a 2 tanto como se quiera, con sólo tomar más términos de la sucesión. Como L es el producto de expresión que tiende a* $-\infty$ *y un número prácticamente igual a 2, puede decirse que el valor de L es también infinitamente negativo, o sea:*

$$L = -\infty$$

*2) Aplicando la definición de límite, prueba que:*

$$\lim_{n\to\infty}(3-\frac{(-1)^n}{n^2}) = 3$$

*Por la definición de límite, se sabe que si se cumple* $L = \lim_{n\to\infty} a_n$, *entonces para un valor de* $\varepsilon \in \Re^+$ *tan pequeño como se quiera, existirá un valor N dependiente de* $\varepsilon$ *tal que,* $|a_n - L| < \varepsilon$ *para todo* $n \geq N$. *La demostración consiste en hallar ese N.*

*Partimos entonces de la expresión* $|a_n - L| < \varepsilon$, *que en nuestro caso se escribe:*

$$\left|3-\frac{(-1)^n}{n^2}-3\right| < \varepsilon \qquad (i)$$

*o sea,*

$$\left|\frac{(-1)^n}{n^2}\right| < \varepsilon \qquad (ii)$$

*como* $\left|(-1)^n\right| = 1$ *para todo valor de n, se cumple que,* $\left|\frac{1}{n^2}\right| < \varepsilon$ *, y como* $n^2 > 0$ *para todo valor de* $n \in \mathrm{N}$*, se tiene también que* $n^2 > \frac{1}{\varepsilon}$ *o sea* $n > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$*. N será entonces el primer número natural mayor que* $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$*. Este número depende del* $\varepsilon$ *elegido, y es más grande cuanto menor es el "error" expresado por* $\varepsilon$*. Por lo tanto, queda demostrada la igualdad de partida.*

*3) Utilizando como dato que la sucesión* $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ *tiene como límite el número* $e = 2.71828...$*, o sea que* $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$*, calcula:*

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{4n+1} = L$$

*Es posible generalizar la expresión* $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ *a la forma más útil dada por* $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\mu_n}\right)^{\mu_n} = e$ ***(1)****, siempre que se cumpla* $\lim_{n\to\infty}\mu_n = \pm\infty$ ***(2)****.*

*__Nota__:* $\lim_{n\to\infty}\mu_n = \pm\infty$ *significa:* $\lim_{n\to\infty}\mu_n = +\infty$*, o bien* $\lim_{n\to\infty}\mu_n = -\infty$

*Re-escribiendo la expresión a analizar:*

$$\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{4n+1} = \left(1+\frac{1}{2n}\right)^{4n}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{1} = \left[\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}\right]^{2}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{1},$$

*se ve que es posible calcular L como el producto de dos límites* $L_1$ *y* $L_2$*, o sea:*
$L = L_1\,L_2$ *, donde:*

$$L_1 = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}\right]^{2} \qquad y \qquad L_2 = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{1}$$

*En la primera expresión, de* $L_1$*, se ha reescrito adrede el exponente 4n como 2(2n) para poder utilizar la expresión* ***(1)*** *mencionada al comienzo. En este caso , el* $\mu_n$ *de dicha expresión es 2n, y cumple con el requisito* ***(2)****, por lo que puede deducirse que el límite de lo contenido entre corchetes:* $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n} = e$ ***(3)***

*Para hallar* $L_1$ *aplicaremos propiedades ya vista de los límites: si* $L = \lim_{n\to\infty} b_n$*, entonces* $L^2 = \lim_{n\to\infty} b_n^2$*. Por lo tanto, en este caso,* $L_1 = [e]^2 = e^2 = 7.38905...$

*Para calcular* $L_2 = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{1}$*, se utiliza simplemente el hecho de que 1/2n tiende a 0 para* $n\to\infty$*, y por lo tanto* $L_2 = 1$*.*

*Con estos dos resultados parciales, es fácil deducir que:* $L = L_1 \,.\, L_2 = e^2 \,.\, 1 = e^2 = 7.38905...$

4) *Calcula:* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n+3}\right)^{n+2}$

*Determinación de* $\mu_n$*:*

*Se debe dar forma a la expresión de* $a_n$, *de modo de llevarla a* $a_n=\left(1+\dfrac{1}{\mu_n}\right)^{A\cdot\mu_n+B}$ *(1) (donde A y B son constantes), en la cual sea* $\lim\limits_{n\to\infty}\mu_n=\pm\infty$.

*Entonces:*

$$a_n=\left(\frac{n-1}{n+3}\right)^{n+2}=\left(\frac{n+3-4}{n+3}\right)^{n+2}=\left(\frac{n+3}{n+3}-\frac{4}{n+3}\right)^{n+2}=\left[1+\frac{1}{\left(-\dfrac{n+3}{4}\right)}\right]^{n+2} \qquad (2)$$

$$\boxed{\mu_n=-\frac{n+3}{4}}$$

*Hasta aquí se ha dado forma a la base en la expresión de* $a_n$ *y hemos encontrado la expresión de* $\mu_n$*; ahora debemos operar sobre el exponente de (2) para darle una forma tal que aparezca en él* $\mu_n$, *tal como se mostraba en (1).*

*Es decir:*

$$n+2=A\cdot\mu_n+B$$

*Debemos encontrar A y B:*

$$Si\quad \mu_n=-\frac{n+3}{4}\ \Rightarrow\ n=-4\mu_n-3\ \Rightarrow\ n+2=-4\mu_n-3+2=-4\mu_n-1$$

$$\boxed{A=-4}\qquad\qquad \boxed{B=-1}$$

*Entonces volviendo a (1) podemos expresar:*

$$a_n=\left(1+\frac{1}{\mu_n}\right)^{(-4)\cdot\mu_n-1}$$

*siendo* $\mu_n=-\dfrac{n+3}{4}$ *y* $\lim\limits_{n\to\infty}\mu_n=\lim\limits_{n\to\infty}-\dfrac{n+3}{4}=-\infty$

*Ahora, partiendo del límite original:*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n+3}\right)^{n+2}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\mu_n}\right)^{(-4)\mu_n-1}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\mu_n}\right)^{(-4)\mu_n}\cdot\left(1+\frac{1}{\mu_n}\right)^{-1}\right]=$$

$$=\left[\underbrace{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\mu_n}\right)^{\mu_n}}_{e}\right]^{(-4)}\cdot\underbrace{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\mu_n}\right)^{(-1)}}_{1}=e^{-4}$$

*5) Establece el comportamiento de la sucesión $(a_n)$, estudiando si se trata de una sucesión monótona acotada, siendo:*

$$a_n = \frac{n^2}{n^2+3}$$

*Para ver si se trata de una sucesión monótona analizamos el comportamiento de sus primeros términos:*

$$a_1 = \frac{1}{4} = 0{,}25$$

$$a_2 = \frac{4}{7} = 0{,}5714\ldots$$

$$a_3 = \frac{9}{12} = 0{,}75$$

$$a_4 = \frac{16}{19} = 0{,}842\ldots$$

*Vemos que, considerando sus primeros términos, la sucesión resulta creciente; debemos ahora probar que esto es así para todo "n" natural, es decir que:*

$$a_{n-1} \geq a_n \quad \forall n \in \mathrm{N} \qquad (1)$$

*Veamos que forma tiene* $a_{n+1}$:

$$a_{n+1} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)^2+3} = \frac{n^2+2n+1}{n^2+2n+1+3} = \frac{n^2+2n+1}{n^2+2n+4}$$

*Entonces, debe ser:*

$$\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n+4} \geq \frac{n^2}{n^2+3}$$

*Esta es una desigualdad en la que ambos denominadores son positivos, de modo que podemos multiplicar ambos miembros por el producto de los denominadores sin alterar el sentido de la desigualdad, luego simplificando queda:*

$$\left(n^2+2n+1\right)\left(n^2+3\right) \geq n^2\left(n^2+2n+4\right)$$

$$n^4+3n^2+2n^3+6n+n^2+3 \geq n^4+2n^3+4n^2$$

*Cancelando en ambos miembros, se llega a:*

$$6n+3 \geq 0$$

*lo cual se cumple para todo "n" natural y por lo tanto la desigualdad de partida* ***(1) es verdadera para todo "n" natural****, con lo que demostramos que $(a_n)$ es creciente.*

*Ahora debemos ver si $(a_n)$ está acotada:*
*Como $(a_n)$ es creciente, el menor término es $a_1$, por lo tanto:*

$$a_n \geq a_1 = \frac{1}{4} \qquad \forall n \in \mathrm{N}$$

*Es decir, $(a_n)$ está acotada inferiormente; para ver si está acotada superiormente planteamos la existencia de una cota superior C, de modo que $a_n \le C$ y vemos si esto se cumple $\forall n \in \mathrm{N}$.*

*Entonces:*

$$a_n \le C \qquad (2)$$

$$\frac{n^2}{n^2+3} \le C$$

$$n^2 \le C \cdot (n^2+3)$$

$$n^2 \le C \cdot n^2 + 3 \cdot C$$

$$-3 \cdot C \le C \cdot n^2 - n^2$$

$$-3 \cdot C \le n^2 \cdot (C-1) \qquad (3)$$

*Llegado a este punto, tengo dos alternativas: 1ª) que sea $C-1>0$, y 2ª) que sea $C-1<0$.*

*1ª) Elijo $C>1 \Rightarrow C-1>0$, y opero en consecuencia:*

$$\frac{-3 \cdot C}{C-1} \le n^2$$

*Esta última desigualdad y ,por lo tanto, **(2) son ciertas para cualquier valor natural de "n"**, ya que habiendo elegido $C>1$, resulta $\frac{-3 \cdot C}{C-1} < 0$ y, siendo n un natural, es siempre $n^2 > 0$.*

*En consecuencia resulta que **$(a_n)$ es creciente y está acotada,** ya que si tomamos, por ejemplo C=2, podemos afirmar que:*

$$\frac{1}{4} \le a_n \le 2 \qquad \forall n \in \mathrm{N}$$

*Por lo tanto queda demostrado que la sucesión **$(a_n)$ es convergente**, es decir **tiene límite finito**.*

*2ª) Elijo $C<1 \Rightarrow C-1<0$, operando en (3):*

$$\frac{-3 \cdot C}{C-1} \ge n^2$$

*El sentido de la desigualdad se invierte debido al signo negativo de $(C-1)$, expresión por la que dividimos ambos miembros .*

*Veamos como funciona esto, por ejemplo si $C = \frac{1}{3}$. La última desigualdad quedaría:*

$\dfrac{-3 \cdot (-\frac{1}{3})}{(\frac{1}{3})-1} = \dfrac{1}{(-\frac{2}{3})} = -\dfrac{3}{2} \ge n^2 \Rightarrow$ *No existe $n \in N$, que pueda cumplir esta condición ya que cualquier natural elevado al cuadrado es un número positivo o cero.*

*En consecuencia no se cumple tampoco (2) si elegimos $C<1$.*

# ANALISIS MATEMATICO I

## Ejercicios resueltos
## Límite de funciones

*1) Resuelve los siguientes límites:*

*a)* $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4x^2-3x-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)\cdot(4x+1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}(4x+1) = 4\cdot 1+1 = 5$

*NOTA:*
*Como* $x=1$ *es raíz del polinomio* $4x^2-3x-1$ *, éste es divisible por* $(x-1)$*, luego se obtiene el cociente:* $(4x+1)$*, dividiendo los polinomios en la forma tradicional o utilizando la regla de Ruffini.*

*b)* $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)\cdot(x+1)}{(x-1)\cdot(x-2)} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x+1)}{(x-2)} = \dfrac{(1+1)}{(1-2)} = -2$

*NOTA: Se factoreó el polinomio del numerador aplicando " diferencia de cuadrados". Para factorear el polinomio del denominador se usó la resolvente de Bascara.*

*c)* $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{5x^2-20x+15}{x^2-x-6} = \lim\limits_{x\to 3}\dfrac{5\cdot(x-3)\cdot(x-1)}{(x-3)\cdot(x+2)} = \lim\limits_{x\to 3}\dfrac{5\cdot(x-1)}{(x+2)} = \dfrac{5\cdot(3-1)}{3+2} = \dfrac{10}{2} = 5$

*Factoreo del numerador:*
$5x^2-20x+15 = 5\cdot(x^2-4x+3)$*; luego el polinomio entre paréntesis se factorea utilizando la resolvente de Bascara para encontrar sus raíces.*

*d)* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x-3)(3x+5)(4x-6)}{3x^3+x-1}$

*Dividimos numerador y denominador por la mayor potencia que aparece en la expresión, en nuestro caso:* $x^3$ *(**cuidado** que debemos tener en cuenta que en el numerador el producto de las tres expresiones entre paréntesis también determina un polinomio de tercer grado!), quedando:*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(2x-3)(3x+5)(4x-6)}{3x^3+x-1} = \lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{(2x-3)(3x+5)(4x-6)}{x^3}}{\dfrac{3x^3+x-1}{x^3}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} = \frac{\dfrac{(2x-3)}{x}\dfrac{(3x+5)}{x}\dfrac{(4x-6)}{x}}{\dfrac{3x^3+x-1}{x^3}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\dfrac{2x}{x}-\dfrac{3}{x}\right)\left(\dfrac{3x}{x}+\dfrac{5}{x}\right)\left(\dfrac{4x}{x}-\dfrac{6}{x}\right)}{\dfrac{3x^3}{x^3}+\dfrac{x}{x^3}-\dfrac{1}{x^3}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\left(2-\dfrac{3}{x}\right)\left(3+\dfrac{5}{x}\right)\left(4-\dfrac{6}{x}\right)}{3+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}}$$

*haciendo tender* $x\to\infty$*, todos los términos :* $\dfrac{3}{x};\dfrac{5}{x};\dfrac{6}{x};\dfrac{1}{x^2}$ *y* $\dfrac{1}{x^3}$ *tienden a cero, quedando:*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(2x-3)(3x+5)(4x-6)}{3x^3+x-1} = \frac{2\cdot 3\cdot 4}{3} = 8$$

*d)* $$\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^2+5)\cdot(x-3)}{\sqrt{x^6-3x^2}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-3x^2+5x-15}{\sqrt{x^6-3x^2}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{x^3}{x^3}-\dfrac{3x^2}{x^3}+\dfrac{5x}{x^3}-\dfrac{15}{x^3}}{\dfrac{\sqrt{x^6-3x^2}}{x^3}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{5}{x^2}-\dfrac{15}{x^3}}{\sqrt{\dfrac{x^6-3x^2}{x^6}}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{5}{x^2}-\dfrac{15}{x^3}}{\sqrt{\dfrac{x^6}{x^6}-\dfrac{3x^2}{x^6}}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{5}{x^2}-\dfrac{15}{x^3}}{\sqrt{1-\dfrac{3}{x^4}}} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to+\infty}1-\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3}{x}+\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5}{x^2}-\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{15}{x^3}}{\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1-\dfrac{3}{x^4}}} = \frac{1-0+0-0}{\sqrt{1-0}} = 1$$

*e)* $$\lim_{x\to1}\frac{x-1}{\sqrt{x^2+3}-2} = \lim_{x\to1}\left(\frac{x-1}{\sqrt{x^2+3}-2}\cdot\frac{\sqrt{x^2+3}+2}{\sqrt{x^2+3}+2}\right) = \lim_{x\to1}\left(\frac{(x-1)\cdot\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}{\left(\sqrt{x^2+3}\right)^2-2^2}\right) =$$

$$= \lim_{x\to1}\left(\frac{(x-1)\cdot\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}{x^2+3-4}\right) = \lim_{x\to1}\left(\frac{(x-1)\cdot\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}{x^2-1}\right) = \lim_{x\to1}\left(\frac{(x-1)\cdot\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}{(x-1)\cdot(x+1)}\right) =$$

$$= \lim_{x\to1}\left(\frac{\sqrt{x^2+3}+2}{(x+1)}\right) = \frac{\sqrt{1^2+3}+2}{(1+1)} = 2$$

*NOTA:*
*Para pasar del primer al segundo límite se multiplica y divide por el conjugado del denominador para lograr en el denominador del tercer límite una diferencia de cuadrados.*

*f)* $$\lim_{x\to3}\frac{x^2-6x+9}{sen^2(x-3)} = \lim_{x\to3}\frac{(x-3)^2}{sen^2(x-3)} = \lim_{x\to3}\left\{\frac{(x-3)}{sen\ (x-3)}\right\}^2 = \left\{\lim_{x\to3}\frac{(x-3)}{sen\ (x-3)}\right\}^2 =$$

$$= \left\{\lim_{x\to3}\frac{1}{\dfrac{sen\ (x-3)}{(x-3)}}\right\}^2 = \left\{\frac{\lim\limits_{x\to3}1}{\lim\limits_{x\to3}\dfrac{sen\ (x-3)}{(x-3)}}\right\}^2 = \left\{\frac{1}{1}\right\}^2 = 1$$

*NOTA:*
*Primero se factoreó el polinomio del numerador, observando que se trataba de un trinomio cuadrado perfecto (puede utilizarse Bascara para encontrar sus raices) y en el final se aplica* $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{sen(x)}{x}=1$.

g) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{sen(\pi-x)}{x^2-\pi^2}$

*si aplicamos diferencia de cuadrados en el denominador:*

$$\lim_{x\to\pi}\frac{sen(\pi-x)}{(x-\pi)(x+\pi)}=\lim_{x\to\pi}\left[\frac{sen(\pi-x)}{(x-\pi)}\cdot\frac{1}{(x+\pi)}\right]=\lim_{x\to\pi}\frac{sen(\pi-x)}{(x-\pi)}\cdot\lim_{x\to\pi}\frac{1}{(x+\pi)}=$$

$$=\lim_{x\to\pi}\frac{sen(\pi-x)}{[-(\pi-x)]}\cdot\lim_{x\to\pi}\frac{1}{(x+\pi)}=-\lim_{x\to\pi}\frac{sen(\pi-x)}{(\pi-x)}\cdot\lim_{x\to\pi}\frac{1}{(x+\pi)}=-1\cdot\frac{1}{(\pi+\pi)}=-\frac{1}{2\pi}$$

<u>*NOTA*</u>*: Como* $x\to\pi \Rightarrow (\pi-x)\to 0$ *, luego, si hacemos un cambio de variables:* $t=\pi-x$ *, podemos afirmar:* $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{sen(\pi-x)}{(\pi-x)}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{sen(t)}{t}=1$

h) $$\lim_{x\to2}\frac{x^2-5x+6}{(x-3)\cdot sen(x-2)}=\lim_{x\to2}\frac{(x-3)\cdot(x-2)}{(x-3)\cdot sen(x-2)}=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)}{sen(x-2)}=\lim_{x\to2}\frac{1}{\dfrac{sen(x-2)}{(x-2)}}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to2}1}{\lim\limits_{x\to2}\dfrac{sen(x-2)}{(x-2)}}=\frac{1}{1}=1$$

i) $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x+3}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1+4}{x-1}\right)^{x+3}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x-1}+\frac{4}{x-1}\right)^{x+3}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\dfrac{x-1}{4}}\right)^{x+3}=$$

*realizamos un cambio de variables:*

$$u=\frac{x-1}{4};\quad x=4u+1$$

*Luego:*

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^{4u+1+3}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^{4u+4}=\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{u}\right)^{4u}\cdot\left(1+\frac{1}{u}\right)^{4}\right\}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^{4u}\cdot\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^{4}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{u}\right)^{u}\right\}^{4}\cdot\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^{4}=\left\{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^{u}\right\}^{4}\cdot\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^{4}=e^4\cdot1=e^4$$

j) $$\lim_{x\to0}(1+sen(5x))^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0}(1+sen(5x))^{\frac{1}{x}\cdot\frac{sen(5x)}{5}\cdot\frac{5}{sen(5x)}}=\lim_{x\to0}(1+sen(5x))^{\frac{1}{sen(5x)}\cdot\frac{sen(5x)}{5x}\cdot5}=$$

$$=\underbrace{\lim_{x\to0}\left\{\left[1+\frac{1}{\dfrac{1}{sen(5x)}}\right]^{\frac{1}{sen(5x)}}\right\}}_{L}{}^{\overbrace{\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{sen(5x)}{5x}\cdot5\right)}^{5}}=e^5$$

NOTA:

$$Si \quad x \to 0^+ \Rightarrow sen(5x) \to 0^+ \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{sen(5x)} = +\infty \quad , y$$

$$si \quad x \to 0^- \Rightarrow sen(5x) \to 0^- \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{sen(5x)} = -\infty$$

*pero en ambos casos, en la última expresión de límite, resulta:* $L = e$.

$$k) \quad \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x-2}{x+5}\right)^x = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x+5-7}{x+5}\right)^x = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x+5}{x+5} - \frac{7}{x+5}\right)^x = \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{-(x+5)}{7}}\right)^x =$$

*realizamos un cambio de variables:*

$$u = \frac{-(x+5)}{7} \quad \Rightarrow \quad x = -7u - 5$$

*luego:*

$$\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{u}\right)^{-7u-5} = \lim_{x\to\infty} \left\{\left(1+\frac{1}{u}\right)^{-7u} \cdot \left(1+\frac{1}{u}\right)^{-5}\right\} = \lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{u}\right)^{-7u} \cdot \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^{-5} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \left\{\left(1+\frac{1}{u}\right)^{u}\right\}^{-7} \cdot \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^{-5} = \left\{\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{u}\right)^{u}\right\}^{-7} \cdot \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^{-5} = e^{-7} \cdot 1 = e^{-7}$$

*2. Prueba por definición que:*

$$a) \quad \lim_{x\to -2} \frac{x^2-4}{x+2} = -4$$

$$\lim_{x\to -2} \frac{x^2-4}{x+2} = -4 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \ \exists \ \delta > 0 \ / \ 0 < |x-(-2)| < \delta \to \left|\left(\frac{x^2-4}{x+2}\right) - (-4)\right| < \varepsilon$$

$$\left|\left(\frac{x^2-4}{x+2}\right) - (-4)\right| < \varepsilon \qquad (1)$$

$$\left|\left(\frac{(x-2)\cdot(x+2)}{x+2}\right) - (-4)\right| < \varepsilon$$

$$|x+2| < \varepsilon$$

*Luego, si tomamos* $\delta = \varepsilon$, *podemos decir:*

$$|x-(-2)| < \delta \qquad (2)$$

*Es decir que para todo $\varepsilon$, la condición (1) se va a verificar para todo x que cumpla con (2), con lo que queda demostrado que el límite dado tiene el valor propuesto.*

*b)* $\lim\limits_{x \to 3} \frac{2}{3}x - 1 = 1$

$$\lim_{x \to 3} \frac{2}{3}x - 1 = 1 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \ \delta > 0 \ / \ 0 < |x-3| < \delta \to \left|\left(\frac{2}{3}x - 1\right) - 1\right| < \varepsilon$$

$$\left|\left(\frac{2}{3}x-1\right)-1\right| < \varepsilon \ , \ \left|\frac{2}{3}x - 2\right| < \varepsilon \ , \ \left|\frac{2x-6}{3}\right| < \varepsilon \ , \ \left|\frac{2(x-3)}{3}\right| < \varepsilon \ , \ \left|\frac{2}{3}\right| \cdot |x-3| < \varepsilon \ , \ \frac{2}{3}|x-3| < \varepsilon \ ,$$

$$|x-3| < \frac{3}{2}\varepsilon$$

*Luego* $\delta = \frac{3}{2}\varepsilon$ *,entonces para cada* $\varepsilon$ *es posible encontrar el correspondiente* $\delta$ *con cual consideramos que el resultado límite original es el correcto.*

*c)* $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{4x-2}{x+5} = 4$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{4x-2}{x+5} = 4 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \ \exists \, k > 0 \ / \ x > k \to \left|\left(\frac{4x-2}{x+5}\right) - 4\right| < \varepsilon \quad (1)$$

$$\left|\left(\frac{4x-2}{x+5}\right)-4\right| < \varepsilon \ , \ \left|\frac{4x-2-4(x+5)}{x+5}\right| < \varepsilon \ , \ \left|\frac{4x-2-4x-20}{x+5}\right| < \varepsilon \ , \ \left|\frac{-22}{x+5}\right| < \varepsilon \ , \ \frac{22}{|x+5|} < \varepsilon \ ,$$

$$\frac{22}{\varepsilon} < |x+5| \ , \ \frac{22}{\varepsilon} < x+5 \ , \ \frac{22}{\varepsilon} - 5 < x \qquad \left( Como \ x \to +\infty \ \Rightarrow \ (x+5) > 0 \ \Rightarrow \ |x+5| = x+5 \right)$$

*Luego si* $H = \frac{22}{\varepsilon} - 5$ *, para todo* $x > H$ *se verifica (1), con lo cual queda probado que el límite dado tiene el resultado propuesto.*

*3) Comprueba que* $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{4x-8}{x+1}\right) = 4$ *y da el valor de H para* $\varepsilon = \frac{3}{400}$.

*Podemos comprobar* ***(no probar)*** *el resultado del límite, dándole a x valores positivos y negativos* ***cada vez mayores en valor absoluto*** *y verificando que el valor correspondiente de la f(x) está* ***cada vez más cerca*** *del valor 4.*

*Por definición:*

*Si* $|f(x) - L| < \varepsilon$ *para todo* $|x| > H(\varepsilon) \Rightarrow \lim\limits_{x \to \infty} f(x) = L$

*Entonces:*

$$\left|\frac{4x-8}{x+1} - 4\right| < \frac{3}{400} \qquad (1)$$

$$\left|\frac{4x-8-4x-4}{x+1}\right| \langle \frac{3}{400}$$

$$\left|\frac{-12}{x+1}\right| \langle \frac{3}{400} \qquad (2)$$

*Para sacar las barras de valor absoluto debemos considerar dos alternativas:*

*a) que* $x \to +\infty \Rightarrow x > 0$, *quedando la (2):*

$$\frac{12}{x+1} \langle \frac{3}{400}$$

*Como ambos denominadores son positivos, operando en la inecuación resulta:*

$$12 \cdot 400 < 3 \cdot (x+1)$$

$$12 \cdot 400 < 3 \cdot (x+1)$$

$$\frac{4800-3}{3} < x$$

$$1599 < x$$

*Luego, debe ser:*

$$x > H_1 = 1599 \qquad (3)$$

*para que se cumpla la condición (1).*

*b) que* $x \to -\infty \Rightarrow x < 0$, *y si suponemos a x lo suficientemente grande, en valor absoluto, podemos afirmar que también* $x+1 < 0$ *quedando, entonces, la (2):*

$$\frac{-12}{x+1} \langle \frac{3}{400}$$

*En este caso, y si operamos en la inecuación:*

$$(-12) \cdot 400 > 3 \cdot (x+1)$$

*y resolviendo en forma similar a lo visto en a), tendremos:*

$$\frac{-4800-3}{3} > x$$

*debiendo ser:*

$$x < H_2 = -1601 \qquad (4)$$

*para que se cumpla la condición (1).*

*Si tomamos* $H = Máx\{|H_1|;|H_2|\}$, *podemos decir que la ecuación (1) se cumplirá para todo valor de x que cumpla con:*

$$|x > H$$

*En nuestro caso, como* $H = Máx\{|1599|;|-1601|\} = 1601$, *para todo x que verifique* $|x| > 1601$, *podemos afirmar que se cumple* $\left|\frac{4x-8}{x+1} - 4\right| < \frac{3}{400}$ .

*Obviamente el valor encontrado para H (1601) depende del* $\varepsilon$ $\left(\frac{3}{400}\right)$ *elegido, pero si para cada* $\varepsilon$ *somos capaces de encontrar su correspondiente H,* ***habremos probado*** *que* $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{4x-8}{x+1}\right) = 4$ .

# *ANALISIS MATEMATICO I*

## *Ejercicios resueltos*
## *Continuidad de funciones*

***Definición***: *una función f (x) es continua en el punto $x_o$ si:*

1. *f (x) esta definida en $x_o$*
2. $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

*La primer condición dice que la función f (x) tiene que tener valor en el punto $x_0$.*
*La segunda condición dice que el limite de la función f (x) cuando x se aproxima a $x_0$ tiene que ser igual al valor de la función en $x_0$.*

*Observa que en las dos condiciones la función se analiza en $x_0$.*
*Recuerda que $x_0$ es numero real cualquiera que puede tomar la variable x.*

*1) Prueba que la función constante $f(x) = c$ es continua en cualquier punto $x_0$*

*Apliquemos la definición:*
*La función esta definida (es decir tiene valor) en $x_0$.*
*Para cualquier valor de $x_0$ la función siempre toma valor c.*

*Luego* $f(x_0) = c$.
*Además* $\lim_{x \to x_0} c = c = f(x_0)$

*Como se cumplen las dos condiciones, podemos decir que las función constante c es continua en $x_0$, y como $x_0$ representa a cualquier punto de la recta, concluimos que las funciones constantes son continuas en toda el eje real.*

*2) Establece si la función $f(x) = \sqrt{x}$ es continua para cualquier punto $x_0$.*

*Apliquemos la definición:*
*La función está definida (es decir tiene valor) sólo para $x_0 \geq 0$*

*Luego* $f(x_0) = \sqrt{x_0}$
*Además* $\lim_{x \to x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0} = f(x_0)$ *(esto se cumple para todo $x > 0$, pero no en $x = 0$)*

*Como se cumplen las dos condiciones, podemos decir que las función $f(x) = \sqrt{x}$ es continua para todo $x_0 > 0$.*

3) *Estudia la continuidad de la función* $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ *en* $x_0 = 0$

*Esta función no esta definida en* $x_0 = 0$ *(no se puede dividir por cero)*
*Entonces la función dada no cumple con la primer condición de la definición y por lo tanto no es continua en* $x_0 = 0$.

4) *Estudia la continuidad de la función:*

$$f(x)=\begin{cases}0 & si\ \ x=0\\ 1 & si\ \ x\neq 0\end{cases} \qquad \text{en el punto } x_0 = 0$$

*Observa que f (x) es una función que toma dos valores distintos según sea x.*

*Apliquemos la definición:*
*La función esta definida, tiene valor cero en* $x_0 = 0$

*Es decir* $f(0)=0$.
*Además* $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$, *ya que para todos los valores* $x\neq 0$ *(aún los muy próximos a 0) es* $f(x)=1$.

*Pero no se cumple la segunda condición de la definición, ya que:*
$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1\neq 0=f(0)$

*Luego la función no es continua en* $x_0 = 0$.

5) *Prueba que la función:*

$$f(x)=\begin{cases}2x-1 & si\ \ x\neq 2\\ 3 & si\ \ x=2\end{cases} \qquad \text{es continua en toda la recta.}$$

*Observa la diferencia. En los ejercicios anteriores se pedía probar la continuidad de una función en un punto; aquí se pide en toda la recta.*

*Para estudiar la continuidad de la función en toda la recta, se debe analizar la f(x) en* $x\neq 2$ *y* $x = 2$.

*Para* $x\neq 2$, $f(x)=2x-1$
*Tomando un valor cualquiera* $x_0$:
$f(x_0)=2x_0-1$ *(tiene valor* $\Rightarrow \exists\ f(x_0)\ \ \forall x_0\neq 2$*)*
*Además* $\lim\limits_{x\to x_0} 2x-1=2x_0-1=f(x_0)$
*Luego la función f (x) es continua para todo valor de* $x\neq 2$ *(i)*

*Para* $x = 2$, $f(x)=3$
*Luego* $f(2)=3$

*Además* $\lim_{x \to 2} 2x - 1 = 4 - 1 = 3 = f(2)$

*Observa la función que se utilizó en el cálculo del límite.*
*Esto es por que cuando calculamos el límite lo hacemos para valores de x próximos a 2, para los cuales f (x) = 2x – 1.*

*Luego la función f (x) es continua para* $x = 2$ *(ii)*

*Por lo tanto, de (i) y (ii), la función es continua en toda la recta.*

*6) Dada la siguiente función:*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & si \quad x \le 0 \\ ax + b & si \quad 0 < x < 1 \\ x^3 & si \quad x \ge 1 \end{cases}$$

*halla a y b de modo que f(x) sea continua para todo* $x \in \Re$.

*En este ejercicio se pide la continuidad de la función en toda la recta; por lo tanto el proceso de análisis es parecido a la del ejercicio anterior. Es decir, primero estudiamos la continuidad de la función para las distintas condiciones dadas eligiendo un punto cualquiera* $x_0$, *luego vemos que pasa en los puntos críticos que en este caso son 0 y 1.*

*Observa que f (x) es una función cuadrática en* $x \le 0$, *cambia a lineal en* $0 < x < 1$ *y es cúbica para* $x \ge 1$.

*De este análisis saldrán los valores de a y b.*

*La función f (x) es continua cuando:*

$f(x) = x^2$ *para todo valor de* $x < 0$
$f(x) = ax + b$ *para todo valor de* $0 < x < 1$
$f(x) = x^3$ *para todo valor de* $x > 1$
*Por tratarse en todos los casos de polinomios (de grados: 2, 1 y 3, respectivamente), que son funciones continuas en su campo de definición (ver propiedades de las funciones continuas).*

*Veamos si la función es continua en los puntos críticos 0 y 1.*

*<u>En x = 0</u>:*
$f(x) = x^2 \quad f(0) = 0$ *(la función está definida)*

*Como la función cambia de tipo en x = 0, debemos calcular los límites laterales:*

*Si* $x \to 0^- \Rightarrow x < 0 \Rightarrow f(x) = x^2$ *y resulta:*
$\lim_{x \to 0} x^2 = 0^2 = 0$

*Si* $x \to 0^+ \Rightarrow 1 > x > 0 \Rightarrow f(x) = ax + b$, *quedando:*
$\lim_{x \to 0^+} ax + b = a \cdot 0 + b = b$

*Según la segunda condición de la definición, debe existir el* $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$, *para ello deben existir ambos límites laterales y coincidir en un valor único; luego b tiene que ser igual a 0.*

*Como* $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0)$, *entonces la función es continua en el punto en cuestión.*

*<u>En x = 1</u>:*
$f(x) = x^3 \quad f(1) = 1$ *(la función esta definida)*

*Como la función cambia de tipo en x = 1, debemos calcular los límites laterales:*

*Si* $x \to 1^- \Rightarrow x < 1 \Rightarrow f(x) = ax + b$
$\lim\limits_{x \to 1^-} ax + b = a \cdot 1 + b = a + b$

*Si* $x \to 1^+ \Rightarrow x > 1 \Rightarrow f(x) = x^3$
$\lim\limits_{x \to 1^+} x^3 = 1^3 = 1$

*Según la segunda condición de la definición, debe* $\exists \lim\limits_{x \to 1} f(x)$ *es decir el valor de los límites laterales debe ser único, luego* $a + b$ *tiene que ser igual a 1.*

*Si* $a + b = 1$ *y* $b = 0 \qquad a + 0 = 1$

$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 1 = f(1)$

*Entonces la función es continua en el punto en cuestión.*

*Luego la función f (x) es continua en toda la recta si* $a = 1$ *y* $b = 0$.

*7) Calcula el valor de A para que la función f (x) resulte continua en x = 0.*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{tg(5x)}{x} & si \quad x \neq 0 \\ A & si \quad x = 0 \end{cases}$$

*Apliquemos la definición:*

*La función está definida, tiene valor A en x = 0*
*Luego* $f(0) = A$

*Según la segunda condición:*
$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0) = A$
*Luego el valor del limite de la función es el valor de A.*

*Teniendo en cuenta que en los alrededores de x = 0 , es* $f(x)=\dfrac{tg(5x)}{x}$; *planteamos:*

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg(5x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{sen(5x)}{x\cdot cos(5x)}=\lim_{x\to 0}\frac{5\cdot sen(5x)}{5x\cdot cos(5x)}=\lim_{x\to 0}\frac{sen(5x)}{5x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{5}{cos(5x)}=1\cdot 5=5$$

*Como se cumplen las dos condiciones, la función f (x) es continua en x = 0 siendo el valor de A = 5.*

*La función queda de la siguiente manera:*

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{tg(5x)}{x} & si \quad x\neq 0\\[2ex] 5 & si \quad x=0\end{cases}$$

*8) Para la función* $f(x)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1-\cos x}{x}\right)$ *establece el punto de discontinuidad y si es evitable, indica como se puede salvarse la discontinuidad.*

*La función no cumple con la primer condición de la definición (no esta definida) en el punto x = 0.*
*Luego la función es discontinua en x = 0; a continuación veremos si es una discontinuidad evitable.*
*Hemos estudiado que existen funciones que a pesar de no ser continuas en un punto* $x_0$ *tienen limite en dicho punto; este tipo de discontinuidades se llaman evitables.*

*Calculemos el límite de f (x):*

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\left(\frac{1-cos(x)}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\left(\frac{1-cos(x)}{x}\right)\cdot\left(\frac{1+cos(x)}{1+cos(x)}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1^2-cos^2(x)}{2x(1+cos(x))}=\lim_{x\to 0}\frac{sen^2(x)}{2x(1+cos(x))}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{sen^2(x)}{2x(1+cos(x))}=\lim_{x\to 0}\frac{sen(x)\cdot sen(x)}{2x(1+cos(x))}=\frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{sen(x)}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{sen(x)}{1+cos(x)}=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 0=0$$

*Entonces podemos definir una nueva función g(x) que coincide con f(x)* $\forall \quad x\neq x_0 \quad y \quad g(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L$, *siendo en este caso* $x_0=0 \quad y \quad L=0$.

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1-cos}{x}\right) & si \quad x\neq 0\\[2ex] 0 & si \quad x=0\end{cases}$$

*9) Dada la función :* $f(x) = 2x^2 - \frac{|x-1|}{x-1}$

*Estudia su continuidad en* $\Re$*. Señala si existe alguna discontinuidad y clasifícala.*

*La función no cumple con la primer condición de la definición: no esta definida en el punto* $x = 1$.

*Para* $x \neq 1$ *la función es continua (haz el análisis para un* $x_o$ *como hicimos en ejercicios anteriores)*

*Luego la función es discontinua en* $x = 1$*; veamos si es evitable.*

*Para ello (ver el ejercicio anterior) analicemos el límite de la función en dicho punto.*
*Vemos que la función contiene un término en valor absoluto.*
*Aplicando la definición de valor absoluto:*

$$|x-1| = x-1 \quad si \;\; x > 1 \quad luego: \quad f(x) = 2x^2 - \frac{x-1}{x-1} = 2x^2 - 1 \quad si \;\; x > 1$$

$$|x-1| = -(x-1) \quad si \;\; x < 1 \quad luego: \quad f(x) = 2x^2 - \frac{-(x-1)}{x-1} = 2x^2 + 1 \quad si \;\; x < 1$$

*Por lo tanto la función cambia de tipo a la izquierda y derecha de 1, luego debemos calcular los límites laterales:*

$$\lim_{x \to 1^+} 2x^2 - 1 = 2 \cdot 1^2 - 1 = 1$$

$$\lim_{x \to 1^-} 2x^2 + 1 = 2 \cdot 1^2 + 1 = 3$$

*No existe* $\lim_{x \to 1} f(x)$ *(recordar que los límites laterales deben tener el mismo valor para que así fuera), luego la discontinuidad no es evitable.*

# ANALISIS MATEMATICO I

## Ejercicios resueltos
## Derivada

*Definición: una función f (x) es derivable en un punto $x_0$ si existe el límite del cociente:*

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

*esto es:*

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

*si* $h=x-x_0 \quad\Rightarrow\quad x=x_0+h$

*entonces, si* $x\to x_0 \quad\Rightarrow\quad h\to 0$

*teniendo en cuenta esto, la* $f'(x_0)$ *toma la siguiente expresión:*

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \qquad (1)$$

*1. Aplicando esta definición, hallaremos la derivada de la función:* $f(x)=\frac{1}{x-2}$ *,*
*en el punto* $x_0=1$

*De (1) tenemos...* $$f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$

*Analizamos el numerador del cociente incremental...*

$$f(1+h)=\frac{1}{1+h-2}=\frac{1}{h-1} \qquad\qquad f(1)=\frac{1}{1-2}=-1$$

*Reemplazando estos valores...*

$$f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{1}{h-1}-1\right)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{1-(h-1)}{h-1}\right)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{1-h+1}{h-1}\right)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\,\frac{h}{h-1}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h-1}=-1$$

*2. Otra forma de determinar el valor de la derivada en el punto es, hallar la derivada de la función como una nueva función y luego a esta última calcularla en el punto en cuestión. Veamos...*

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \qquad (2)$$

*Compara las expresiones (1) y (2)...*

*La primera expresa la derivada de una función en un punto $x_0$; la segunda, la derivada de la función como otra función de la variable x.*

*Analizamos en (2) el numerador del cociente incremental...*

$$f(x+h)=\frac{1}{x+h-2} \qquad\qquad f(x)=\frac{1}{x-2}$$

*Reemplazando estas expresiones en (2)...*

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{1}{x+h-2}-\frac{1}{x-2}\right) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{x-2-(x+h-2)}{(x+h-2)(x-2)}\right) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{x-2-x-h+2}{(x+h-2)(x-2)}\right) =$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{-h}{(x+h-2)(x-2)}\right) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{-1}{(x+h-2)(x-2)}\right) = \frac{-1}{(x-2)^2}$$

*Como se puede observar el resultado de la derivada de la función, es otra función.*
*A continuación calculamos la derivada en el punto en cuestión:*

$$f'(1) = \frac{-1}{(1-2)^2} = -1$$

*Qué valor tiene la derivada de la función en* $x_0 = 2$*...???*

$$f'(2) = \frac{-1}{(2-2)^2}$$

*La derivada no tiene valor finito en dicho punto (decimos que* $f'(x)$ *no está definida en* $x_0 = 2$*).*

*3. Veamos otro ejercicio... halla la derivada de* $f(x) = \sqrt{2x+1}$
*Observa que no se pide la derivada en un punto determinado, por lo tanto el resultado no será esta vez un valor sino una función de x.*

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

*Aplicando el procedimiento anterior...*

$$f(x+h) = \sqrt{2(x+h)+1} \qquad\qquad f(x) = \sqrt{2x+1}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{2(x+h)+1}-\sqrt{2x+1}}{h}$$

*Para calcular este límite multiplicamos y dividimos el cociente incremental por el conjugado del numerador:*

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{2(x+h)+1}-\sqrt{2x+1}}{h}\cdot\frac{\sqrt{2(x+h)+1}+\sqrt{2x+1}}{\sqrt{2(x+h)+1}+\sqrt{2x+1}}$$

*De este modo nos queda una diferencia de cuadrados en el numerador...*

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\left(\sqrt{2(x+h)+1}\right)^2-\left(\sqrt{2x+1}\right)^2}{h\left(\sqrt{2(x+h)+1}+\sqrt{2x+1}\right)} = \lim_{h\to 0}\frac{2x+2h+1-2x-1}{h\left(\sqrt{2(x+h)+1}+\sqrt{2x+1}\right)} =$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{2h}{h\left(\sqrt{2(x+h)+1}+\sqrt{2x+1}\right)} = \frac{2}{2\sqrt{2x+1}} = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$$

*4. Quieres ver este ejemplo...???*
*Dada la función:*

$$f(x)=\begin{cases} x^2 sen\dfrac{\pi}{x} & si \quad x\neq 0 \\ \\ 0 & si \quad x=0 \end{cases}$$

*que es continua en* $x_0=0$ *(si tienes dudas...pruébalo); hallar, si existe, la derivada en dicho punto.*
*El ejercicio pide la derivada de la función en un punto...entonces aplico (1).*

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$

$f(0+h)=(0+h)^2 sen\dfrac{\pi}{0+h}$ *y* $f(0)=0$ *(ver la expresión de la función...si x = 0...)*

$f'(0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h^2}{h}\left(sen\dfrac{\pi}{h}-0\right)=\lim\limits_{h\to 0}h\cdot sen\dfrac{\pi}{h}=0$ *(Este límite ya se calculó, ver práctico de límites...)*

*La función tiene derivada en el punto en cuestión y tiene valor cero.*

***Función implícita.***

*5. Hallar la derivada de la función:* $e^y=x+y$

*Una función f(x) está definida implícitamente por la ecuación F(x,y) = 0, si y solo si, la función y = f(x) es solución de la ecuación, es decir F(x, f(x)) = 0*
*Entonces, la función dada toma la forma...*

$$e^y-x-y=0$$

*Derivamos esta expresión, teniendo en cuenta que y = f(x):*

$$e^y y'-1-y'=0$$

$$y'(e^y-1)=1$$

$$y'=\frac{1}{e^y-1}$$

6. *La ecuación* $x^2 + y^2 = r^2$ *representa una circunferencia de radio r y centro en el origen.*

*La forma implícita de esta ecuación es...* $x^2 + y^2 - r^2 = 0$

*Derivamos esta expresión, teniendo en cuenta que...*

$$y = f(x) = \sqrt{r^2 - x^2} \qquad y = g(x) = -\sqrt{r^2 - x^2}$$

$$2x + 2yy' - 0 = 0$$

$$y' = \frac{-2x}{2y} = \frac{-x}{y}$$

***Diferenciales.***

*El incremento de y (variable dependiente) debido a un incremento de x (variable independiente) esta dado por la expresión...*

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

*El diferencial de y es...*

$$dy = f'(x)dx$$

*Vimos que el incremento de una función se compone de dos términos infinitesimales de distinto orden. El primero llamado diferencial de la función y el segundo que tiende a cero cuando* $\Delta x \to 0$.

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \varepsilon(\Delta x)\Delta x$$

*tomando a* $\Delta x$ *como infinitésimo de comparación el primer término tiende a* $f'(x)$ *y el segundo término tiende a cero:*

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x)\Delta x}{\Delta x} = f'(x) \neq 0 \qquad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\varepsilon(\Delta x)\Delta x}{\Delta x} = 0$$

*Buscando una aproximación, decimos que el incremento de la función es igual al diferencial de la función despreciando el segundo término cometiendo un error que será menor, en la medida que* $\Delta x$ *sea menor.*

7. *Considerando entonces que* $\Delta y \cong dy$ *...vamos hallar aproximadamente:* $\sqrt[3]{124}$

*La aproximación en un punto* $x_0$ *es:* $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \cong f'(x_0)dx$

*y considerando que* $\Delta x = dx$, *podemos escribir:*

$$f(x_0 + \Delta x) \cong f(x_0) + f'(x_0)\Delta x \qquad (3)$$

*Para hacer uso de esta fórmula necesito saber cuales son:* $f(x)$, $x_0$ *y* $\Delta x$

*Según el ejemplo...* $f(x) = \sqrt[3]{x}$ *luego...* $f(x_0) = \sqrt[3]{x_0}$

$$f(x_0 + \Delta x) = \sqrt[3]{x_0 + \Delta x}$$

$$f'(x_0)=\frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x_0^{\,2}}}$$

*Solo falta saber que valor tiene* $x_0$ *y* $\Delta x$

*La elección de estos valores depende del valor de* $\Delta x$. *Cuanto menor sea éste, menor será el error que se comete.*

*Si pensamos...* $\sqrt[3]{124}=\sqrt[3]{125-1}=\sqrt[3]{5^3-1}=f(x_0+\Delta x)$

*Luego...* $x_0=5^3$ *y* $\Delta x=-1$ *entonces...*

$$f(5^3)=\sqrt[3]{5^3}=5$$

$$f'(5^3)=\frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{(5^3)^2}}=\frac{1}{3}\frac{1}{5^{3\cdot 2/3}}=\frac{1}{3}\frac{1}{5^2}=\frac{1}{75}$$

*De (3) y considerando los últimos pasos...*

$$\sqrt[3]{124}=\sqrt[3]{5^3-1}=f(5^3-1)\cong f(5^3)+f'(5^3)(-1)=5+\frac{1}{75}(-1)=5-0{,}0113=4{,}9867$$

*8. Otro ejemplo...hallar aproximadamente:* $sen\ 31^0$

*Según el ejemplo...* $f(x)=sen\,x$ *luego...* $f(x_0)=sen\,x_0$

$$f(x_0+\Delta x)=sen(x\ +\Delta x)$$

$$f'(x_0)=cos\,x_0$$

*Si imaginamos...* $sen\ 31^0=sen(30^0+1^0)=f(x_0+\Delta x)$

*Luego...* $x_0=30^0=\dfrac{\pi}{6}$ $(*)$ *y* $\Delta x=1^0=\dfrac{\pi}{180}$ $(*)$

$$f(30^0)=sen\ 30^0=sen\left(\frac{\pi}{6}\right)=0{,}5$$

$$f'(30^0)=cos\ 30^0=cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

*De (3) y considerando los últimos pasos...*

$$f(30^0+1^0)=sen\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{180}\right)\cong f(\frac{\pi}{6})+f'(\frac{\pi}{6})\cdot\left(\frac{\pi}{180}\right)=0{,}5+\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\pi}{180}=0{,}5+0{,}015=0{,}515$$

*(*) Como al trabajar con funciones operamos con números reales, los ángulos debemos expresarlos en radianes.*

*9. Deriva las siguientes funciones:*

*a)* $f(x)=x\ln x$

*b)* $f(x)=\sqrt{3tg^4(2x^2-5)+6x^2}$

*c)* $f(x)=x^{sen^2 x}$

*d)* $f(x)=(ln\,x)^{1-cos\,x}$

*Resolución:*

*a) Para encontrar la derivada de* $f(x)=x\,ln\,x$, *derivamos el producto de funciones, utilizando la regla correspondiente:*

$$(uv)'=u'v+v'u\text{, donde llamamos } u=x,\quad v=ln\,x$$

*De la tabla de derivadas sabemos que:* $u'=1,\quad v'=\frac{1}{x}$ *, por lo tanto resulta:*

$f'(x)=u'v+v'u=1.ln\,x+\frac{x}{x}=1+ln\,x$ *, que es el resultado buscado.*

*b)* $f(x)=\sqrt{3tg^4(2x^2-5)+6x^2}=\left[3tg^4(2x^2-5)+6x^2\right]^{\frac{1}{2}}$

*Derivamos utilizando la regla de derivación de una potencia,* $D(u^n)=n\cdot u^{n-1}\cdot u'$ :

$$f'(x)=\frac{1}{2}\left[3tg^4(2x^2-5)+6x^2\right]^{-\frac{1}{2}}\cdot\left[3\cdot 4tg^3(2x^2-5)\cdot\sec^2(2x^2-5)\cdot(4x)+12x\right]$$

$$f'(x)=\frac{3\cdot 4tg^3(2x^2-5)\cdot\sec^2(2x^2-5)\cdot(4x)+12x}{2\sqrt{3tg^4(2x^2-5)+6x^2}}$$

*c)* $f(x)=x^{sen^2 x}$

*Tenemos una función de la forma:* $f(x)=g(x)^{h(x)}$. *En estos casos, se utiliza el método de derivación logarítmica. El primer paso consiste en aplicar logaritmo natural a ambos lados de la igualdad:*

$$ln[f(x)]=ln\left(x^{sen^2 x}\right)$$

*Luego, utilizando la propiedad del logaritmo de una potencia, queda:*

$$ln[f(x)]=sen^2 x\cdot ln\,x$$

*Este paso nos permite pasar, en el segundo miembro, de una función exponencial a un producto de funciones (que sabemos derivar). Ahora derivamos, respecto a x, ambos miembros de la igualdad, utilizando la regla de la cadena:*

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=2senx\cdot cos\,x\cdot ln\,x+sen^2 x\cdot\frac{1}{x}$$

*y despejamos* $f'(x)$:

$$f'(x)=\left(2senx\cdot cos\,x\cdot ln\,x+sen^2x\cdot\frac{1}{x}\right)\cdot f(x)$$

$$f'(x)=\left(2senx\cdot cos\,x\cdot ln\,x+sen^2x\cdot\frac{1}{x}\right)\cdot x^{sen^2x}$$

*d) Este es un caso similar al anterior, por lo tanto seguimos los mismos pasos. Tenemos:*

$$y=f(x)=(ln\,x)^{1-cos\,x}$$

*aplicamos logaritmo natural en ambos miembros y la propiedad vista para el logaritmo de una potencia:*

$$ln\,y=(1-cos\,x)\cdot ln(ln\,x)$$

*luego derivamos respecto a x, recordando que* $y=f(x)$ *:*

$$(ln\,y)'=[(1-cos\,x)\cdot ln(ln\,x)]'$$

*o, usando la notación de Leibniz:*

$$\tfrac{d}{dx}(ln\,y)=\tfrac{d}{dx}[(1-cos\,x)\cdot ln(ln\,x)] \qquad (1)$$

*y, si llamamos:*

$$u=1-cos\,x$$
$$v=ln(ln\,x)$$

*resulta:*

$$\frac{\tfrac{d}{dx}(y)}{y}=\tfrac{d}{dx}[u\cdot v]=\frac{du}{dx}v+u\frac{dv}{dx} \qquad (2)$$

*y operando:*

$$\frac{dy}{dx}=y'=y\left[\frac{du}{dx}v+u\frac{dv}{dx}\right] \qquad (3)$$

*Calculando ahora las derivadas de u y v:*

$$\frac{du}{dx}=-(-senx)=senx$$
$$\frac{dv}{dx}=\frac{1}{(ln\,x)}\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x\,ln\,x}$$

*y, finalmente reemplazando en (3), queda:*

$$\frac{dy}{dx}=y'=(ln\,x)^{1-cos\,x}\left[senx\cdot[ln(ln\,x)]+(1-cos\,x)\cdot\left(\frac{1}{x\,ln\,x}\right)\right]$$

*o bien, reordenando la ecuación anterior:*

$$y'=(ln\,x)^{1-cos\,x}\left[(senx)\cdot[ln(ln\,x)]+\frac{(1-cos\,x)}{x\,ln\,x}\right]$$

*10. Encuentra la derivada de:*

$$y=f(x)=ln^2\left(xe^{2x}+\frac{1}{x+1}\right)$$

*y calcula su valor en* $x=1$, $(f'(1))$.

*Como es una composición de funciones, utilizaremos la Regla de la Cadena.*

*Separamos las funciones de la siguiente manera:*

$$u = xe^{2x} \quad , \quad v = \frac{1}{x+1}, \qquad h = u + v, \qquad \Rightarrow h' = u' + v',$$

*por otro lado, si llamamos:*

$$f = (ln\, h)^2, \quad \text{tenemos que} \quad f' = 2(ln\, h)\left(\frac{h'}{h}\right)$$

*Por lo tanto, resulta:*

$$f'(x) = 2\left[ln\left(xe^{2x} + \frac{1}{x+1}\right)\right]\left(\frac{1}{xe^{2x} + \dfrac{1}{x+1}}\right)\left(e^{2x}(1+2x) - \frac{1}{(x+1)^2}\right),$$

*que es uno de los resultados buscados.*

*Para hallar* $f'(1)$ *simplemente reemplazamos x por 1, obteniendo* $f'(1) \cong 11.4799$

*11. Resolver por Regla de L'Hôpital, siempre que sea aplicable:*

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{x^n - 1} =$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\cdot cos(x) - sen(x)}{x^3} =$

*a)* $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{x^n - 1} =$

*Primero debemos hacer tender la variable a 1 para ver cual es la tendencia de la expresión:*

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^n - 1} = \frac{1-1}{1^n - 1} \to \frac{0}{0}$$

*Podemos aplicar la Regla de L'Hôpital derivando numerador y denominador por separado:*

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^n - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{nx^{n-1}} = \frac{1}{n1^{n-1}} = \frac{1}{1} = 1$$

*b)* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\cdot cos(x) - sen(x)}{x^3} =$

*En principio hacemos tender la variable a 0 para ver cual es la tendencia de la expresión:*

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\cdot cos(x) - sen(x)}{x^3} = \frac{0\cdot cos(0) - sen(0)}{0^3} \to \frac{0}{0}$$

*Podemos aplicar la Regla de L'Hôpital derivando numerador y denominador por separado:*

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\cdot cos\, x - senx}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{1\cdot cos\, x + x\cdot(-senx) - cos\, x}{3x^2} = -\frac{1}{3}\lim_{x\to 0} \frac{x\cdot senx}{x^2} = -\frac{1}{3}\lim_{x\to 0} \frac{senx}{x} = -\frac{1}{3}\cdot 1 = -\frac{1}{3}$$

*12. Encuentra, si existe, el valor de L, siendo:*

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{senx}\right)=L$$

*Solución:*

*Si bien el límite es indeterminado, la expresión del limite no tiene la forma* $\frac{0}{0}$ *o* $\frac{\infty}{\infty}$ *para poder aplicar la regla de L´Hôpital directamente. Esto es, tenemos*

$$\lim_{x\to a}(f_1-f_2)=\lim_{x\to a} f_1-\lim_{x\to a} f_2=L$$

*o sea un límite de la forma:* $\infty - \infty$.

*En estos casos, es posible convertir la diferencia a la forma* $\frac{0}{0}$ *o* $\frac{\infty}{\infty}$ *utilizando una conversión algebraica, por ejemplo:*

$$f_1-f_2=\left(\frac{f_1-f_2}{f_1f_2}\right)f_1f_2=\left(\frac{1}{f_2}-\frac{1}{f_1}\right)f_1f_2$$

*En este caso:*

$$f_1=\frac{1}{x} \qquad \wedge \qquad f_2=\frac{1}{senx}$$

*esto nos permite escribir:*

$$\lim_{x\to 0}(senx-x)\left(\frac{1}{x.senx}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{(senx-x)}{x.senx}\right)=L$$

*que tiene la forma 0/0 para x tendiendo a 0. Derivando numerador y denominador, tenemos:*

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x-1}{senx+x\cos x}\right)=L$$

*Como este límite sigue teniendo la forma 0/0 para x tendiendo a 0, derivamos una vez mas, obteniendo:*

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{senx}{2\cos x-xsenx}\right)=\frac{0}{2-0}=0$$

*Aquí es claro que el límite es L = 0, ya que el numerador tiende a 0 y el denominador a un número finito (2).*

*13. Sea un triángulo rectángulo cuyas dimensiones cambian continuamente. ¿Con qué velocidad varía la hipotenusa de este triángulo, en un momento en que un cateto tiene una longitud* $s_o$ *= 15 cm, y el opuesto* $s_1$ *=42 cm, si se sabe que* $s_o$ *disminuye de longitud a razón de 30 cm/s, y que* $s_1$ *crece a 12cm/s?*

*Solución:*

*Como en la mayoría de los problemas reales, los requerimientos y datos son expresados en un lenguaje sencillo, y es necesario expresarlos matemáticamente para poder hallar una solución.*
*Primero debemos hallar una expresión para la longitud de la hipotenusa, suponiendo que los lados varían su longitud en función del tiempo. Notando con* $s_o(t)$ *y* $s_1(t)$ *las longitudes variables de los catetos, podemos deducir que la longitud de la hipotenusa es:*

$$H(t)=\sqrt{s^2_o(t)+s^2_1(t)}\,[cm]$$

*Es dato que las velocidades de variación de las longitudes de los catetos son constantes y valen:*

$$\frac{ds_0}{dt} = -30[{}^{cm}/_{s}]$$

$$\frac{ds_1}{dt} = 12\,[{}^{cm}/_{s}]$$

*Finalmente, hallamos la velocidad de variación de H calculando:*

$$\frac{dH(t)}{dt} = \frac{2s_0(t)\frac{ds_0}{dt} + 2s_1(t)\frac{ds_1}{dt}}{2\sqrt{s^2{}_o(t)+s^2{}_1(t)}}[cm/s]$$

*Esta es una función que depende de la variable t. Como lo que debemos hallar es la velocidad en un instante determinado, $t_p$, para el cual los catetos valen $s_o(t_p) = 15$ cm, y $s_1(t_p) = 42$cm, reemplazamos esos valores en (3):*

$$\left.\frac{dH(t)}{dt}\right|_{t=tp} = \frac{2s_0(t_p)\frac{ds_0}{dt} + 2s_1(t_p)\frac{ds_1}{dt}}{2\sqrt{s^2{}_o(t_p)+s^2{}_1(t_p)}}[cm/s]$$

*Como en cualquier aplicación física, es importante verificar que las unidades son correctas. Las unidades del numerador son $cm^2/s$, y las del denominador cm, por lo cual se verifica que el cociente es cm/s. El valor final es:*

$$\left.\frac{dH(t)}{dt}\right|_{t=tp} = \frac{15*(-30)+42*12}{\sqrt{15^2+42^2}} = 1{,}2108[cm/s]$$

*Este resultado indica un aumento en el tiempo de la longitud de la hipotenusa, a pesar de la tendencia a decrecer de uno de los lados del triángulo.*

14. *Estudiar y representar la función:* $g(x) = x^3 - 3x$, *considerando:*
    - a) *Dominio.*
    - b) *Intersección con los ejes.*
    - c) *Extremos relativos e intervalos de crecimiento y decrecimiento.*
    - d) *Puntos de inflexión e intervalos de concavidad hacia arriba y hacia abajo.*
    - e) *Asíntotas.*

*a)* ***Dominio***

*En primer lugar vemos que g(x) se trata de un polinomio, por lo cual podemos establecer que su dominio está formado por todos los números reales:* $D_g = \Re$

*Analizando el comportamiento de la g(x) en los extremos del dominio:*

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} x^3 - 3x = \lim_{x\to+\infty} x^3(1-\frac{3}{x^2}) = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} x^3(1-\frac{3}{x^2}) = -\infty$$

*Por ésto y por tratarse de una función continua en todo su dominio podemos decir que el conjunto del las imágenes de g(x) está integrado por todos los Reales:* $I_g = \Re$

***b) Intersecciones con los ejes***

*Estableceremos los cortes sobre los ejes, calculando las raices de g(x) ( valores de x que anulan la función) y el valor que toma g(x) en x=0:*

*Raíces:*

$$g(x) = x^3 - 3x = x(x^2 - 3) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \quad (1) \\ x = \sqrt{3} \\ x = -\sqrt{3} \end{cases}$$

*En estos valores de x, la gráfica de la función g(x) corta al eje x.*

*Corte del eje y:*

*El valor que toma la función en x=0 es:*

$g(0) = 0$ *, como se vió en (1)*

*En consecuencia la gráfica pasa por (0;0).*

***c) Extremos relativos e intervalos de crecimiento y decrecimiento***

*Estableceremos ahora los puntos criticos (donde sospechamos la existencia de un extremo), que son los valores de x que anulan la derivada de la función g, o bien aquellos donde ésta no existe.*

*Calculamos, entonces, la derivada de g(x):*

$$g'(x) = (x^3 - 3x)' = 3x^2 - 3$$

*Vemos que se trata de otro polinomio, y por lo tanto la función derivada existe para cualquier valor real de x.*

*Luego, igualamos la expresión de g'(x) a cero, de modo que nos queda una ecuación de segundo grado en x, que resolvemos:*

$$3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 0 \quad \Rightarrow \begin{cases} x_{01} = -1 \\ x_{02} = 1 \end{cases}$$

*y estas soluciones resultan ser los puntos críticos buscados.*

*Tratamos de establecer si estos puntos resultan ser máximos o mínimos relativos. Usaremos el* ***criterio de la primera derivada****, esto es estudiar el signo de g'(x) a ambos lados de cada punto crítico:*

*En* $x_{01} = -1$ *:*

*Elegimos un punto a la izquierda de -1,(por ejemplo: -2) y otro a su derecha (entre -1 y 1,por ejemplo: 0) y calculamos el valor de la función derivada en ellos:*

$x = -2 \quad \Rightarrow \quad g'(-2) = 3[(-2)^2 - 1] = 9 > 0 \quad \Rightarrow$ *g(x) es creciente a la izquierda de* $x_{01} = -1$

$x = 0 \quad \Rightarrow \quad g'(0) = 3(0 - 1) = -3 < 0 \quad \Rightarrow$ *g(x) es decreciente a la izquierda de* $x_{01} = -1$

*Es decir, que g(x) pasa de ser creciente a decreciente en el punto estudiado, por lo tanto podemos asegurar que la función* ***<u>g(x) tiene un Máximo Relativo</u>*** *en* $x_{02} = 1$.

*El valor que toma la función en el Máximo Relativo es:* $g(x_{01}) = g(-1) = 2$.

*En* $x_{02} = 1$ *:*

*Ya sabemos que* $g'(0) < 0 \quad \Rightarrow$ *g(x) es decreciente a la izquierda de* $x_{02} = 1$

*Elegimos un punto a la derecha de 1 (por ejemplo: 2) y calculamos el valor de la función derivada en él:*

$x = 2 \Rightarrow g'(2) = 3(2^2 - 1) = 9 > 0 \Rightarrow$ *g(x) es creciente a la derecha de* $x_{02} = 1$

*Es decir, que g(x) pasa de ser decreciente a creciente en el punto estudiado, por lo tanto podemos asegurar que la función <u>g(x) tiene un **mínimo** relativo</u> en* $x_{02} = 1$.

*El valor que toma la función en el mínimo relativo es:* $g(x_{02}) = g(1) = -2$.

*Desde el punto de vista del crecimiento de la función, podemos establecer:*

*g(x) es creciente en los intervalos* $(-\infty;-1)$ *y* $(1;+\infty)$

*g(x) es decreciente en el intervalo* $(-1 \; ; \; 1)$

### *d) Puntos de inflexión e intervalos de concavidad hacia arriba y hacia abajo*

*Los puntos de inflexión de nuestra gráfica, se encuentran en los valores de x que anulan la segunda derivada de la función g, o bien aquellos donde ésta no existe. Éstos serán ahora nuestros puntos críticos:*

$g''(x) = (x^3 - 3x)'' = (3x^2 - 3)' = 6x$

*Nuevamente se trata de una función cuyo dominio son todos los Reales, es decir que no existe valor de x para el cual no exista la segunda derivada de g .*

*Entonces, igualamos la expresión de g''(x) a cero, y resolvemos:*

$$g''(x) = 6x = 0 \Rightarrow x_{03} = 0$$

*Éste es nuestro punto crítico, es decir donde sospechamos que puede existir un punto de inflexión de la gráfica de g(x). Para determinar que así es, estudiamos la concavidad a la izquierda y a la derecha de* $x_{03} = 0$.

*Elegimos los puntos:*

$x = -2 \Rightarrow g''(-2) = 6 \cdot (-2) = -12 < 0 \Rightarrow$ *la gráfica de g(x) tiene concavidad hacia abajo en* $(-\infty;0)$

$x = 2 \Rightarrow g''(2) = 6 \cdot (2) = 12 > 0 \Rightarrow$ *la gráfica de g(x) tiene concavidad hacia arriba en* $(0;+\infty)$

*Como en el punto en estudio hay un cambio en la concavidad de la gráfica de g(x), podemos concluir que existe un **Punto de Inflexión** en* $x_{03} = 0$.

### *e) Asíntotas*

*Como el dominio de la función g(x) es* $D_g = \Re$, *no existen puntos de indefinición de nuestra función y por lo tanto no tiene asíntotas verticales.*

*Para establecer la existencia de asíntotas horizontales se estudia la tendencia de la función cuando* $x \to +\infty$ *y* $x \to -\infty$ *y si* $\lim_{x\to+\infty} g(x) = K$ *(constante) o* $\lim_{x\to-\infty} g(x) = K$ *entonces puede afirmarse que la recta horizontal* $y = K$ *es asíntota de la gráfica de la función.*

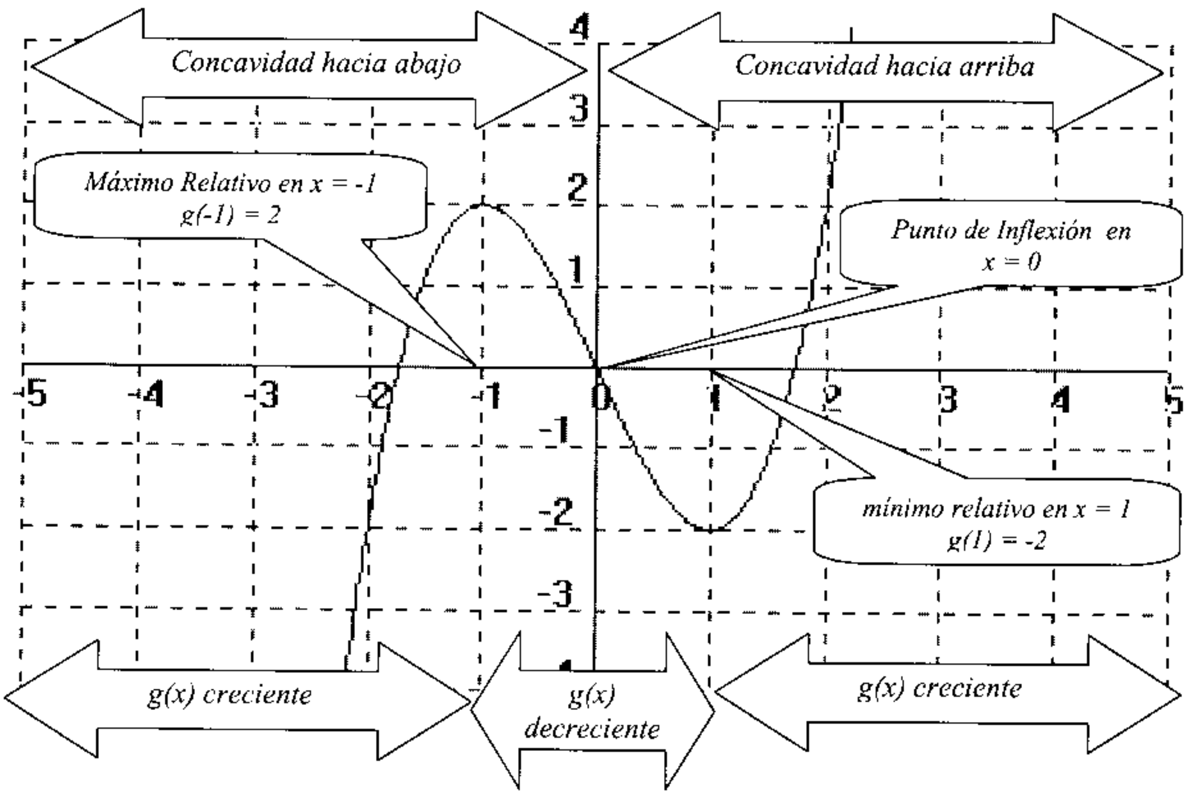
*Como estos límites ya se estudiaron y no resultaron de la forma antedicha, decimos que y=g(x) no tiene asíntotas horizontales.*

*Por último, analizaremos si existen asíntotas oblicuas (del tipo y=ax+b):*

*Cálculo de la pendiente (a):*

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - 3x}{x} = \lim_{x\to\infty} x^2 - 3 = \infty$$

*Al no tener el límite un resultado finito podemos decir que y=g(x) tampoco tiene asíntotas oblicuas.*
*De acuerdo a todos la información elaborada a partir de los datos, podemos trazar la gráfica de la función y=g(x), que resulta:*




*<u>NOTA</u>: Esta función es impar ya que cumple con:*

$$-g(-x)=-[\ (-x)^3-3(-x)\ ]=-[\ -x^3+3x\ ]=x^3-3x=g(x)$$

*de modo que podríamos haber estudiado su comportamiento sólo en el intervalo* $[0;+\infty)$ *y, por simetría respecto al origen de coordenadas, reproducir la función para el semieje* $(-\infty;0)$.
*En este ejemplo preferimos dejar esta circunstancia como verificación del cálculo.*

*15. Grafica la función:* $f(x)=x^2+\dfrac{1}{x}$ *, indicando:*

*a) Dominio.*
*b) Simetrías. Paridad o imparidad.*
*c) Intersección con los ejes.*
*d) Extremos relativos e intervalos de crecimiento y decrecimiento.*
*e) Puntos de inflexión e intervalos de concavidad hacia arriba y hacia abajo.*
*f) Asíntotas.*

***a) Dominio***

*Esta expresión esta definida para cualquier valor de la variable, exceptuando al cero:*

$Dom = \{x \in R / x \neq 0\}$, *o también* $Dom = (-\infty;0) \cup (0;\infty)$

***b) Simetrías - Paridad o imparidad***

*Recordamos que una función es par si* $f(x) = f(-x)$, *impar si* $f(x) = -f(-x)$ *y sin paridad definida si no se cumplen ninguna de las condiciones anteriores.*

*Sabemos que* $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$

*Obtenemos:* $f(-x) = (-x)^2 + \frac{1}{(-x)} = x^2 - \frac{1}{x}$

*Como no se cumplen ninguna de las condiciones anteriores, la función no tiene paridad definida.*

***c) Intersecciones con los ejes***

*Para ver donde la gráfica corta al eje y, debemos calcular f(0). Como 0 no pertenece al Dominio de la función, concluimos que no existe intersección con el eje y.*

*Para obtener las intersecciones con el eje x, debemos igualar f(x) = 0 y despejar x:*

$$x^2 + \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow \frac{x^3+1}{x} = 0 \Rightarrow x^3 + 1 = 0 \Rightarrow x^3 = -1 \Rightarrow x = \sqrt[3]{-1} \Rightarrow x = -1$$

*La curva corta al eje x una sola vez, en el valor* $x = -1$.

***d) Extremos relativos e intervalos de crecimiento y decrecimiento***

*Para calcular los extremos relativos, debemos derivar la función y analizar para qué valores de la variable x, la derivada no existe o se anula (puntos críticos):*

$$f(x) = x^2 + \frac{1}{x} = x^2 + x^{-1}$$

$$f'(x) = 2x - x^{-2} = 2x - \frac{1}{x^2}$$

*La derivada no está definida para x = 0, pero como el 0 no pertenece al Dominio de la función, no puede haber extremo en ese lugar.*

*Buscamos aquellos valores que anulan a la derivada primera:*

$$2x - \frac{1}{x^2} = 0 \Rightarrow \frac{2x^3 - 1}{x^2} = 0 \Rightarrow 2x^3 - 1 = 0 \Rightarrow 2x^3 = 1 \Rightarrow x^3 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$$

*En el punto* $x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ *<u>puede</u> existir un extremo relativo.*

*Para saber si corresponde a un máximo o a un mínimo relativo, una alternativa es estudiar el signo de la derivada segunda valuada en ese punto:*

$$f'(x) = 2x - x^{-2} \Rightarrow f''(x) = 2 - (-2)x^{-3} = 2 + \frac{2}{x^3}$$

$$f''\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right) = 2 + \frac{2}{\sqrt[3]{\frac{1}{2}}} > 0$$

*Esto significa que en* $x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ *existe un mínimo relativo.* *(1)*

*Ahora podemos determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función:*

- *En el intervalo* $(-\infty;0)$, *es* $f'(x) < 0$, *por lo tanto la función es decreciente.*
- *En el intervalo* $\left(0;\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right)$, *por (1) la función es decreciente.*
- *En el intervalo* $\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2}};\infty\right)$, *por (1) la función es creciente.*

***e) Puntos de inflexión e intervalos de concavidad hacia arriba y hacia abajo***

*Para encontrar los puntos de inflexión, debemos estudiar los puntos en los que la derivada segunda de la función, no existe o se anula (puntos críticos).*

$$f''(x) = 2 + \frac{2}{x^3}$$

*Esta expresión no está definida para x = 0, pero como el 0 no pertenece al Dominio de la función, no puede haber punto de inflexión en ese lugar.*
*Buscamos ahora, aquellos valores que anulan la derivada segunda:*

$$f''(x) = 2 + \frac{2}{x^3} \Rightarrow 2 + \frac{2}{x^3} = 0 \Rightarrow \frac{2x^3 + 2}{x^3} = 0 \Rightarrow 2x^3 + 2 = 0 \Rightarrow 2x^3 = -2 \Rightarrow x^3 = -1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \sqrt[3]{-1} = -1$$

*En* $x = -1$ *puede haber punto de inflexión. Debemos analizar el signo de la derivada segunda a izquierda y derecha de este punto.*

$f''(-2) = 2 + \frac{2}{(-2)^3} > 0$ , *la curva es cóncava hacia arriba a la izquierda de* $x = -1$

$f''\left(-\frac{1}{2}\right) = 2 + \frac{2}{\left(-\frac{1}{2}\right)^3} < 0$ , *la curva es cóncava hacia abajo a la derecha de* $x = -1$

*Luego, en* $x = -1$ *existe un punto de inflexión.*

*Ahora determinamos los intervalos de diferente concavidad de la curva:*

- *En el intervalo* $(-\infty;-1)$, $f''(x) > 0$, *por lo tanto la función es cóncava hacia arriba.*
- *En el intervalo* $(-1;0)$, $f''(x) < 0$, *por lo tanto la función es cóncava hacia abajo.*
- En el intervalo $(0;\infty)$, $f''(x) > 0$, por lo tanto la función es cóncava hacia arriba.

***f)* Asíntotas**

*Si consideramos los alrededores del punto de indefinición de f(x), o sea* $x = 0$, *vemos que:* $\lim_{x\to 0^-} x^2 + \frac{1}{x} = -\infty$ *y* $\lim_{x\to 0^+} x^2 + \frac{1}{x} = +\infty$; *de donde podemos concluir que existe una asíntota vertical de ecuación:* $x = 0$.

*Debemos, además, buscar la ecuación de la o las rectas que puedan ser asíntotas oblicuas de la curva. La ecuación buscada tiene la forma* $y = ax + b$.

*Cálculo del coeficiente "a" (pendiente de la recta):*

$$a = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$$

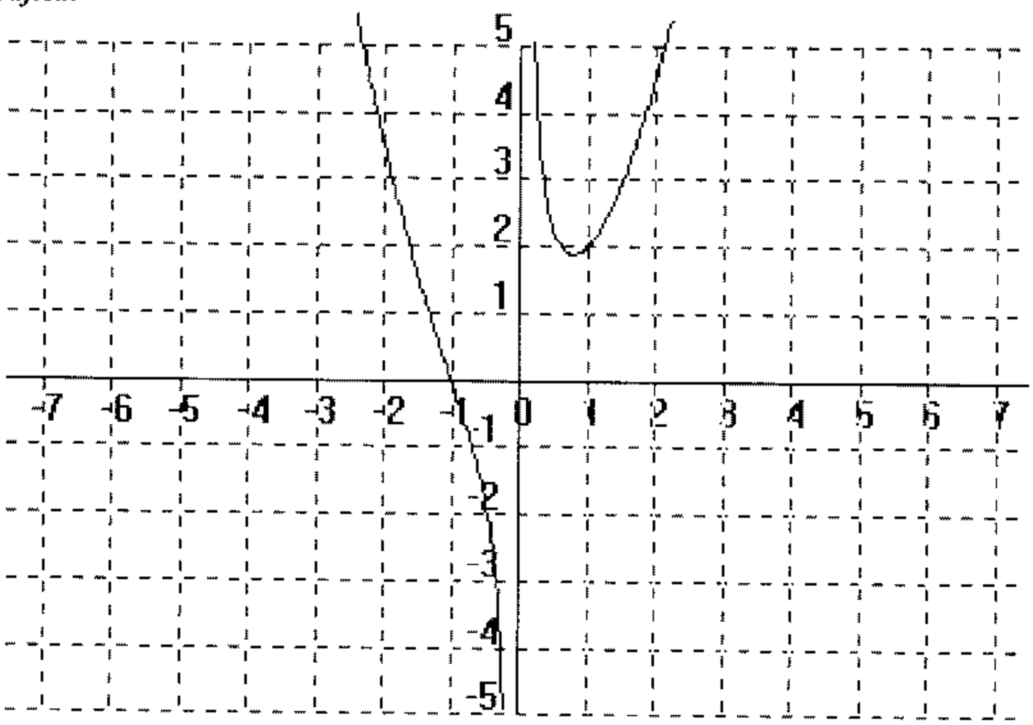
$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 + \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^3+1}{x}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3+1}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2}{2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{3}{2}x$$

*Estudiamos este límite cuando* $x \to +\infty$ y $x \to -\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3}{2}x = \infty \quad \wedge \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{3}{2}x = -\infty$$

*Luego, no existe valor finito de estos límites y en consecuencia no hay rectas oblicuas asintóticas a la gráfica de* $y = f(x)$.

***Gráfica:***



*16. Estudia la función*

$$y = x - senx$$

*Deben encontrarse:*

1. *Dominio de definición de la función.*
2. *Los puntos de discontinuidad.*
3. *Los puntos de máximos y mínimos, relativos y absolutos.*
4. *Los intervalos de crecimiento y decrecimiento.*
5. *Los puntos de inflexión e intervalos de concavidad hacia arriba y hacia abajo,.*
6. *Las asíntotas de la función.*

*Solución:*

*1. La función está definida para todos los valores de* $x \Rightarrow D = \Re$.

*2. La función es continua en todos sus puntos, ya que:*

$$\lim_{x \to x_0} x = x_0 \quad \wedge \quad \lim_{x \to x_0} senx = senx_0 \; \forall x_0 \in Dom[f(x)]$$

*3. Para determinar los máximos y mínimos de la función hallamos la derivada primera:*

$$y' = f'(x) = 1 - cos\, x$$

*En este caso, la derivada existe en todos los puntos, y se anula en los puntos en que* $\cos x = 1$, *o sea en* $x_n = 2n\pi$ *(puntos críticos). (Recordamos que la condición de anulación de la derivada primera es una condición necesaria, pero no suficiente para que existan máximos o mínimos!!!!)*

*Para el análisis existen dos criterios, a saber:*

*a)El criterio de la derivada primera.*

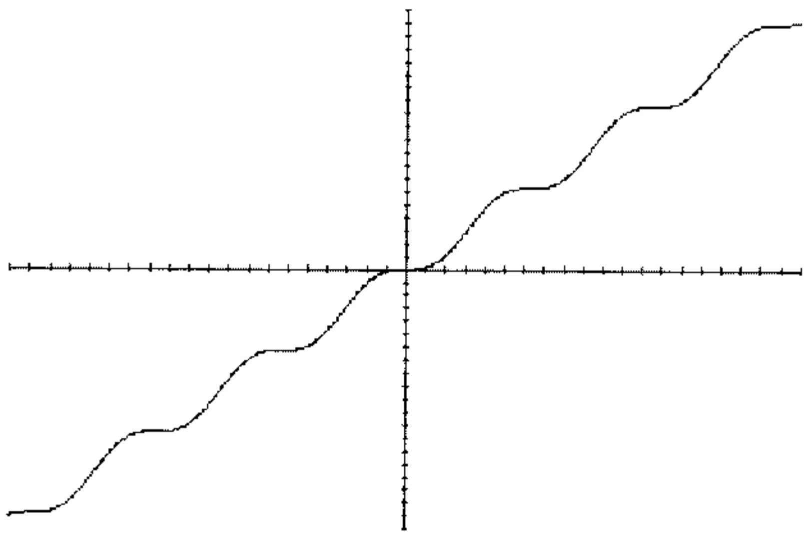
*b)El criterio de la derivada segunda.*

*a)El criterio de la derivada primera dice que si en puntos cercanos al punto crítico* $x_n$, *a ambos lados del mismo, hay un cambio de signo de la función* $y' = f'(x) = 1 - \cos x$, *entonces existe un extremo en* $x_n$. *Además, si el extremo es un mínimo debe cumplirse que para* $x<x_n$, *sea* $y'<0$, *y que para* $x>x_n$ *se cumpla que* $y'>0$. *Por otro lado, si el extremo es un máximo debe cumplirse que para* $x<x_n$ *sea* $y'>0$, *y para* $x>x_n$ *resulte* $y'<0$.

*En este caso, se cumple que* $y'>0$ *permanentemente para cualquier valor de x, por lo cual puede decirse que no existen máximos o mínimos (ya que no hay cambios en el signo de la derivada) a pesar de que la derivada se anula en los puntos críticos (ver el gráfica de la derivada).*

*b) El criterio de la derivada segunda dice que en los puntos críticos* $x_n$ *debe analizarse el signo de la derivada segunda,* $y''=sen(x_n)$ *en nuestro caso. Si el signo es positivo, entonces se trata de un mínimo, y si es negativo se trata de un máximo. Pero la función* $y''=sen(x)$ *se anula en todos los puntos críticos* $x_n=2n\pi$. *Si la derivada segunda se anula, no es posible aplicar este criterio para la obtención de extremos. Por lo tanto, debemos concluir que no existen máximos y mínimos en f(x).*

*La gráfica de la función es:*



# ANALISIS MATEMATICO I

## Ejercicios resueltos
## Primitivas

*1) Calculamos:* $\int \frac{x}{\left(4x^2+3\right)^6}dx$

*Escribiremos la integral como* $\int \left(4x^2+3\right)^{-6} xdx$

*Utilizaremos el método de sustitución, por lo tanto llamaremos:*

$$u = 4x^2+3 \qquad y \qquad du = 8xdx$$

*trataremos de expresar la integral de la forma* $\int u^{-6}du$

*Por tanto,*

$$\int \left(4x^2+3\right)^{-6} xdx = \frac{1}{8}\int \left(4x^2+3\right)^{-6} 8xdx = \frac{1}{8}\int u^{-6}du = \frac{1}{8}\frac{u^{-5}}{(-5)} + C = -\frac{1}{40}\left(4x^2+3\right)^{-5} + C$$

*Recordemos que podemos comprobar la validez del resultado derivando:*

$$\left[-\frac{1}{40}\left(4x^2+3\right)^{-5} + C\right]' = -\frac{1}{40}(-5)\left(4x^2+3\right)^{-6}\cdot(8x) = \frac{x}{\left(4x^2+3\right)^6}$$

*2) Resolvemos:* $\int cos^2 x \quad dx$

*Debemos tener claro que esta integral no es de la forma* $\int u^2 du$*, ya que si suponemos que* $u = cos\, x$*, no tenemos manera de "fabricarnos" el du. (Pensemos que sería* $du = d(cos\, x) = (cos\, x)' dx = -sen\, xdx$*).*

*Aplicaremos una de las fórmulas vistas para el semiángulo:* $cos^2 x = \frac{[1+cos(2x)]}{2}$*. Por lo tanto,*

$$\int cos^2 x \quad dx = \int \frac{1+cos\,2x}{2}dx = \frac{1}{2}\int (1+cos\,2x)dx = \frac{1}{2}\left[\int dx + \int cos\,2xdx\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int dx + \frac{1}{2}\int cos\,2x(d\,2x)\right] = \frac{1}{2}\left[x + \frac{1}{2}sen\,2x\right] + C = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}sen\,2x + C$$

*3) Obtenemos:* $\int \frac{dx}{x\,ln\sqrt{x}}$ *(<u>Sugerencia</u>: utilizar sustitución)*

*Vamos a realizar un cambio de variables:*

$$u = ln\sqrt{x}$$

$$du = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = \frac{1}{2x}dx$$

$$2du = \frac{1}{x}dx$$

*Si reemplazamos en la integral:*

$$\int \frac{dx}{x\,ln\sqrt{x}} = \int \frac{1}{ln\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{x}\,dx \rightarrow \int \frac{1}{u}\,2\,du = 2\int \frac{1}{u}\,du = 2\,ln\,u \rightarrow 2\,ln\,(ln\sqrt{x}\,) + C$$

*Es interesante observar que el dominio de esta función primitiva es* $A = \{x \in \Re \,/\, x > 1\}$*,¿por qué?*

*4)* $\int x^3 e^{x^2} dx$ *(Sugerencia:* $u = x^2$*)*

*Aplicamos la siguiente sustitución:*
$$u = x^2$$
$$du = 2x\,dx$$
$$\frac{du}{2} = x\,dx$$

$$\int x^3\,e^{x^2}\,dx = \int x^2\,e^{x^2}\,x\,dx = \int u\,e^u\,\frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int u\,e^u\,du$$

*Esta integral se resuelve aplicando el método por partes:* $\int z\,dv = z\,v - \int v\,dz$

*Donde:*
$$z = u$$
$$dz = du$$
$$dv = e^u\,du$$
$$v = e^u$$

*Luego:* $\int x^3\,e^{x^2}\,dx \rightarrow \frac{1}{2}\int u\,e^u\,du = \frac{1}{2}\left(u\,e^u - \int e^u\,du\right) = \frac{1}{2}\left(u\,e^u - e^u\right) = \frac{1}{2}\left(e^u\,(u-1)\right)$

*Si sustituimos por la variable original:*

$$\int x^3\,e^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left[e^{x^2}\,(x^2-1)\right] + C$$

*5)* $\int \sqrt[3]{2+cos(x)}\,sen(x)dx$

*Aplicamos la siguiente sustitución:*
$$\begin{cases} u = 2 + cos(x) \\ du = -sen(x)dxx \\ -du = sen(x)d \end{cases}$$

*Reemplazando:* $\int \sqrt[3]{2+cos(x)}\,sen(x)\,dx \rightarrow \int u^{\frac{1}{3}}(-du) = -\int u^{\frac{1}{3}}\,du = \frac{u^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} = \frac{u^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4}\sqrt[3]{u^4}$

*El resultado final es :* $\int \sqrt[3]{2+cos(x)}\,sen(x)\,dx = \frac{3}{4}\sqrt[3]{(2+cos(x))^4} + C$

*6)* $\int \sqrt{12+4x-x^2}\,dx$

*Expresamos el integrando como uno de la forma:* $\sqrt{ax^2+bx+c}$

*Para ello, debemos completar cuadrados en el radicando:*

$$12+4x-x^2=-(x^2-4x-12)$$

$$x^2-4x-12=x^2-4x+(2)^2-(2)^2-12=(x-2)^2-4-12=(x-2)^2-16=(x-2)^2-4^2$$

*Luego:* $\int\sqrt{12+4x-x^2}\,dx=\int\sqrt{-\left[(x-2)^2-4^2\right]}\,dx=\int\sqrt{4^2-(x-2)^2}\,dx$

*Esta integral se resuelve aplicando la sustitución* $u=x-2$ *y luego, por reglas de integración, el resultado es :* $\int\sqrt{12+4x-x^2}\,dx=\frac{1}{2}\left[x\sqrt{12+4x-x^2}+4^2\,\text{arc sen}\left(\frac{x-2}{4}\right)\right]+C$

7) *Resolvemos:* $\int\frac{2x-8}{\sqrt{1-x-x^2}}dx$

*Planteamos la siguiente sustitución:*

$$\begin{cases}u=1-x-x^2\\ du=(-2x-1)dx\\ -du=(2x+1)dx\end{cases}$$

*Si escribimos el numerador del integrando de la siguiente forma:*

$$\int\frac{2x-8}{\sqrt{1-x-x^2}}dx=\int\frac{2x+1-9}{\sqrt{1-x-x^2}}dx=\int\left(\frac{2x+1}{\sqrt{1-x-x^2}}+\frac{-9}{\sqrt{1-x-x^2}}\right)dx=$$

$$=\int\frac{2x+1}{\sqrt{1-x-x^2}}dx+\int\frac{-9}{\sqrt{1-x-x^2}}dx=\int\frac{2x+1}{\sqrt{1-x-x^2}}dx-9\int\frac{1}{\sqrt{1-x-x^2}}dx$$

*Vamos a separar el problema en dos integrales: I y II*

*Integral I :* $\int\frac{2x+1}{\sqrt{1-x-x^2}}dx$ *Integral II :* $\int\frac{1}{\sqrt{1-x-x^2}}dx$

<u>*Resolución de la integral I:*</u>

*Aplicamos la sustitución* $\begin{cases}u=1-x-x^2\\ du=(-2x-1)dx\\ -du=(2x+1)dx\end{cases}$

$$\int\frac{2x+1}{\sqrt{1-x-x^2}}dx=\int\frac{-du}{\sqrt{u}}=-\int u^{-\frac{1}{2}}du=-\frac{u^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}=-2\sqrt{u}=-2\sqrt{1-x-x^2}$$

Resolución de la integral II:

*Expresamos el integrando como uno de la forma:* $\dfrac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$

*Para ello, debemos completar cuadrados en el radicando del denominador:*

$$1-x-x^2=-(x^2+x-1)$$

$$x^2+x-1=x^2+x+\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2-1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}-1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}$$

*Luego:* $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{1-x-x^2}}dx=\int\frac{1}{\sqrt{-\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}\right]}}dx$ *o también* $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{\left(\sqrt{\frac{5}{4}}\right)^2-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}}dx$

*y, sacando factor común dentro de la raíz, queda:*

$$\int\frac{1}{\sqrt{\left(\sqrt{\frac{5}{4}}\right)^2\left[1-\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{5}{4}}}\right)^2\right]}}dx=\int\frac{1}{\left(\sqrt{\frac{5}{4}}\right)\sqrt{1-\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{5}{4}}}\right)^2}}dx=\sqrt{\frac{4}{5}}\int\frac{1}{\sqrt{1-\left[\sqrt{\frac{4}{5}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]^2}}dx$$

*Esta integral se resuelve aplicando la sustitución* $u=\sqrt{\frac{4}{5}}\left(x+\frac{1}{2}\right)$, *de modo que* $du=\sqrt{\frac{4}{5}}dx$, *luego:*

$$\int\frac{1}{\sqrt{1-\left[\sqrt{\frac{4}{5}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]^2}}\sqrt{\frac{4}{5}}dx=\int\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}du$$

*De la tabla de integrales obtenemos el resultado:*

$$arcsen(u)+C=arcsen\left[\sqrt{\frac{4}{5}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]+C$$

*Si llevamos los resultados de las integrales I y II al problema original:*

$$\int\frac{2x-8}{\sqrt{1-x-x^2}}dx=-2\sqrt{1-x-x^2}+ln\left(x+\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\left(\sqrt{\frac{5}{4}}\right)^2}\right)+C$$

8) $\displaystyle\int\frac{5x-8}{x^3-2x^2-8x}dx$ *(sugerencia: fracciones simples)*

*El primer paso es obtener las raíces del denominador del integrando, para poder identificar en qué caso de integración nos encontramos:*

$$x^3 - 2x^2 - 8x = x \cdot (x^2 - 2x - 8)$$

*El factor entre paréntesis es un polinomio de segundo grado, por lo tanto podemos obtener sus raíces aplicando la Fórmula de Bascara.*

$$x^3 - 2x^2 - 8x = x \cdot (x + 2) \cdot (x - 4)$$

*La descomposición en fracciones simples del integrando toma la siguiente forma (raíces reales y simples):*

$$\frac{5x - 8}{x^3 - 2x^2 - 8x} = \frac{5x - 8}{x \cdot (x + 2) \cdot (x - 4)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x + 2} + \frac{C}{x - 4}$$

$$5x - 8 = \left( \frac{A}{x} + \frac{B}{x + 2} + \frac{C}{x - 4} \right) \cdot x \cdot (x + 2) \cdot (x - 4)$$

$$5x - 8 = A \cdot (x + 2) \cdot (x - 4) + B \cdot x \cdot (x - 4) + C \cdot x \cdot (x + 2)$$

*Esta expresión es una identidad válida para cualquier valor real de x. Por cada valor que se le asigna a la variable x, estamos en presencia de una ecuación en la que las incógnitas son A, B y C.*

$Si\ x = 0 \rightarrow\ -8 = A \cdot (2) \cdot (-4)$ *luego:* $A = 1$

$Si\ x = -2 \rightarrow\ 5(-2) - 8 = B \cdot (-2) \cdot (-2 - 4)$ *luego.* $B = -\frac{3}{2}$

$Si\ x = 4 \rightarrow\ 5(4) - 8 = C \cdot 4 \cdot (4 + 2)$ *luego:* $C = \frac{1}{2}$

*La descomposición del integrando toma la forma:*

$$\frac{5x - 8}{x \cdot (x + 2) \cdot (x - 4)} = \frac{1}{x} + \frac{\frac{3}{2}}{x + 2} + \frac{\frac{1}{2}}{x - 4}$$

*Volviendo ahora al ejercicio de integración:*

$$\int \frac{5x - 8}{x^3 - 2x^2 - 8x} dx = \int \frac{5x - 8}{x \cdot (x + 2) \cdot (x - 4)} dx = \int \left( \frac{1}{x} + \frac{\frac{3}{2}}{x + 2} + \frac{\frac{1}{2}}{x - 4} \right) dx =$$

$$= \int \frac{1}{x} dx + \int \frac{\frac{3}{2}}{x + 2} dx + \int \frac{\frac{1}{2}}{x - 4} dx == \int \frac{1}{x} dx + \frac{3}{2} \int \frac{1}{x + 2} dx + \frac{1}{2} \int \frac{1}{x - 4} dx =$$

$$= \ln x + \ln (x + 2) + \ln (x - 4) + C$$

## *Integrales Definidas.*

*9) Evaluamos:* $\displaystyle\int_{-2}^{1}\left(x^3+4\right)dx$

*Aplicando las propiedades de la integral, tenemos que*

$$\int_{-2}^{1}\left(x^3+4\right)dx=\int_{-2}^{1}x^3dx+\int_{-2}^{1}4dx=\left.\frac{x^4}{4}\right|_{-2}^{1}+\left.4x\right|_{-2}^{1}=\left[\frac{1}{4}-\frac{(-2)^4}{4}\right]+\left[4-4\cdot(-2)\right]=-\frac{15}{4}+12=\frac{33}{4}$$

*10) Hallaremos el área A encerrada por la curva* $y=\dfrac{1}{\sqrt{5x-2}}$ *,las rectas x=1 y x=3 , y el eje de las abscisas.*

*Lo que se pide es calcular* $A=\displaystyle\int_{1}^{3}\frac{dx}{\sqrt{5x-2}}$ *, ya que es la función dada integrada entre los valores 1 y 3 del eje de abscisas. La función existe para todos los valores a integrar (la raíz de la función está en x=2/5), por lo cual es posible realizar la operación. Conviene utilizar la sustitución* $u=5x-2$*, con lo cual el diferencial nos queda* $du=5dx$ *y tenemos:*

$$\int\frac{\left(\frac{du}{5}\right)}{\sqrt{u}}=\frac{1}{5}\int u^{-1/2}du$$

*Cuando tenemos una integral definida, podemos trabajar a) encontrando la primitiva en la variable **u** y después cambiando a la variable **x** resolviendo la integral definida entre sus extremos originales, o bien b) trabajando directamente con la variable **u**, cambiando los extremos.*

*a)*
$$\frac{1}{5}\int u^{-1/2}du=\frac{1}{5}\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{1}{2}\right)}+C=\frac{2}{5}\sqrt{5x-2}+C=F(x)+C$$

*Como se trata de una integral definida, resulta* $A=F(3)-F(1)=1.4422-0.69282=0.7494$

*b) Aquí tenemos que tener en cuenta que el área a calcular está expresada en una variable u que es distinta de x. Por lo tanto, es necesario analizar qué ocurre con la variable u al pasar x de 1 a 3.*
*En nuestro caso, tenemos:*

$$u=5x-2 \qquad \text{por lo cual} \qquad \begin{array}{l} x=1\longrightarrow u=5\cdot1-2=3 \\ x=3\longrightarrow u=5\cdot3-2=13 \end{array}$$

*Por lo tanto,*

$$A=\frac{1}{5}\int_{3}^{13}u^{-1/2}du=\frac{1}{5}\left[\left.\tfrac{2}{1}u^{\frac{1}{2}}\right|_{3}^{13}\right]=\frac{1}{5}\left[\tfrac{2}{1}13^{\frac{1}{2}}-\tfrac{2}{1}3^{\frac{1}{2}}\right]=0.7494001$$

*que como vemos coincide con el resultado anterior. Gráficamente, el resultado de integrar esta función puede verse en la siguiente figura.*

*11) Calcularemos el área encerrada por las siguientes funciones:*

$$f(x) = 3000 \cdot \cosh\frac{x}{3000} = 3000\frac{e^{x/3000} + e^{-x/3000}}{2}$$

*Como el vano es de 100 metros, si ubicamos el origen del eje x en el centro del vano, los extremos de integración resultan...* $a = -50$ *y* $b = 50$

*Para simplificar el cálculo de la integral, como* $f(x)$ *es simétrica con respecto al eje "y" (si tienes dudas de ello...anímate a probar que f(x) es par), se tomará como extremos de integración 0 y 50 y al resultado lo multiplicamos por 2.*

*Por otra parte* $f'(x) = 3000 \cdot senh\left(\frac{x}{3000}\right) \cdot \frac{1}{3000} = senh\left(\frac{x}{3000}\right) = \frac{e^{x/3000} - e^{-x/3000}}{2}$ *, entonces:*

$$s = 2\int_0^{50} \sqrt{1 + senh^2\frac{x}{3000}}\ dx$$

*Como* $\cosh^2 x - senh^2 x = 1$ *resulta que...* $\cosh x = \sqrt{1 + senh^2 x}$ *luego...*

$$s = 2\int_0^{50} \sqrt{1 + senh^2\frac{x}{3000}}\ dx = 2\int_0^{50} \cosh\frac{x}{3000}\ dx$$

*Para resolver la integral aplico el método de sustitución...*

$$u = \frac{x}{3000} \qquad du = \frac{dx}{3000} \qquad 3000 \cdot du = dx$$

$Si\ \ x = 0 \qquad u = 0$

$Si\ \ x = 50 \qquad u = 0{,}016666666$

$$s = 2\int_0^{50} \cosh\frac{x}{3000}\ dx = 2 \cdot 3000\int_0^{0{,}01666} \cosh u\ du = 6000 \cdot senh\ \ u\Big|_0^{0{,}01666} =$$

$$= 6000(senh\ \ 0{,}01666 - senh\ \ 0) = 100{,}0046$$

*La longitud del cable es de 100,0046 metros.*

*13) También se encuentra entre las aplicaciones de la Integral Definida, el cálculo de volumen de un sólido.*

*Uno de los métodos de cálculo es el de sección de área conocida cuya fórmula de aplicación es:*

$$V = \int_a^b A(x)\ dx$$

*Para aplicar ésta fórmula, las secciones del sólido deben pertenecer a planos perpendiculares al eje "x" y tener área conocida en función de x.* $(A(x))$





*Veamos un ejemplo...*

*Un sólido tiene una base circular de 4 unidades de radio. Hallar su volumen si toda su sección perpendicular al eje "x" es un cuadrado.*